

INTRODUCCIÓN A LA ASTROFÍSICA RELATIVISTA

Gustavo E. Romero
Cursada 2020, FCAyG/UNLP

Astronomía: estudio del universo, los objetos que lo forman y los procesos que les acontecen, a partir de la detección y medición de partículas y ondas que estos emiten.

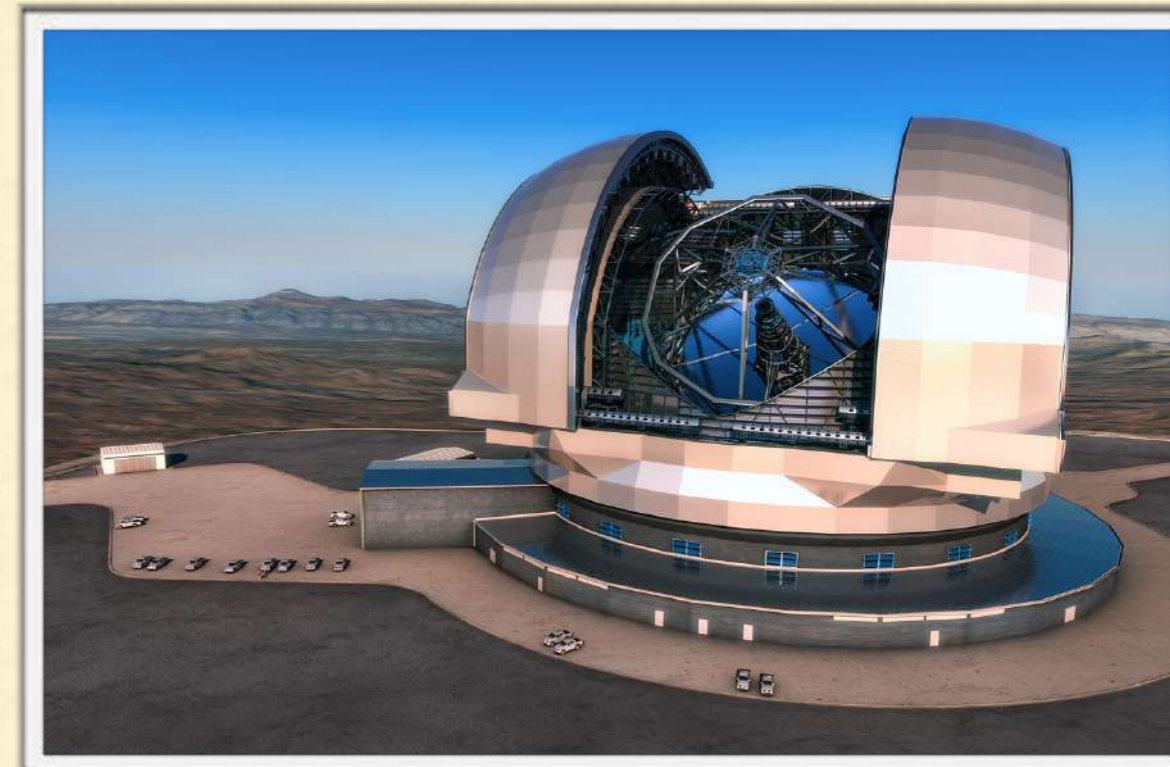
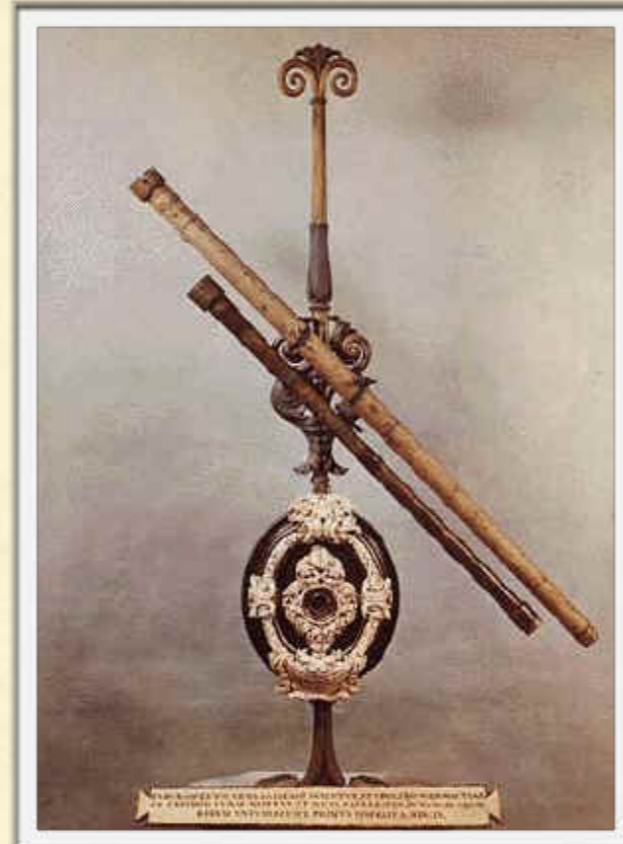
Astrofísica: investigación de la naturaleza de los objetos de estudio de la astronomía a partir de nuestro conocimiento de las leyes físicas. Aplica la física conocida a fin de poder generar representaciones conceptuales adecuadas de los objetos y procesos descubiertos por la astronomía.

En forma similar podemos caracterizar la **astroquímica** y la **astrobiología** como la investigación de los sistemas químicos y biológicos cuya existencia se infiere por la astronomía.

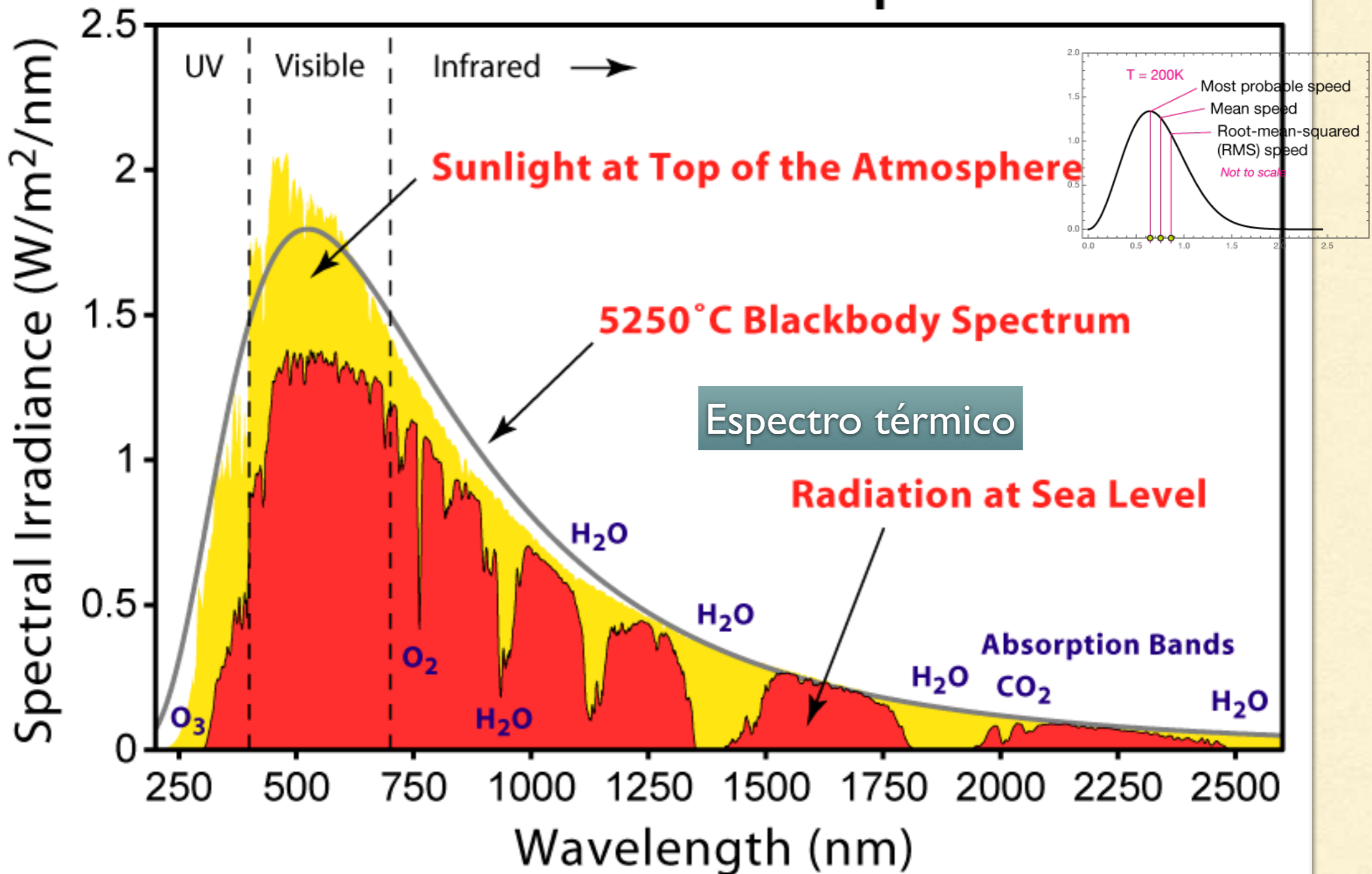
Durante la mayor parte de su historia, la Astronomía se ha limitado a un tipo muy específico de partículas de origen cósmico: **fotones** con una longitud de onda en el rango

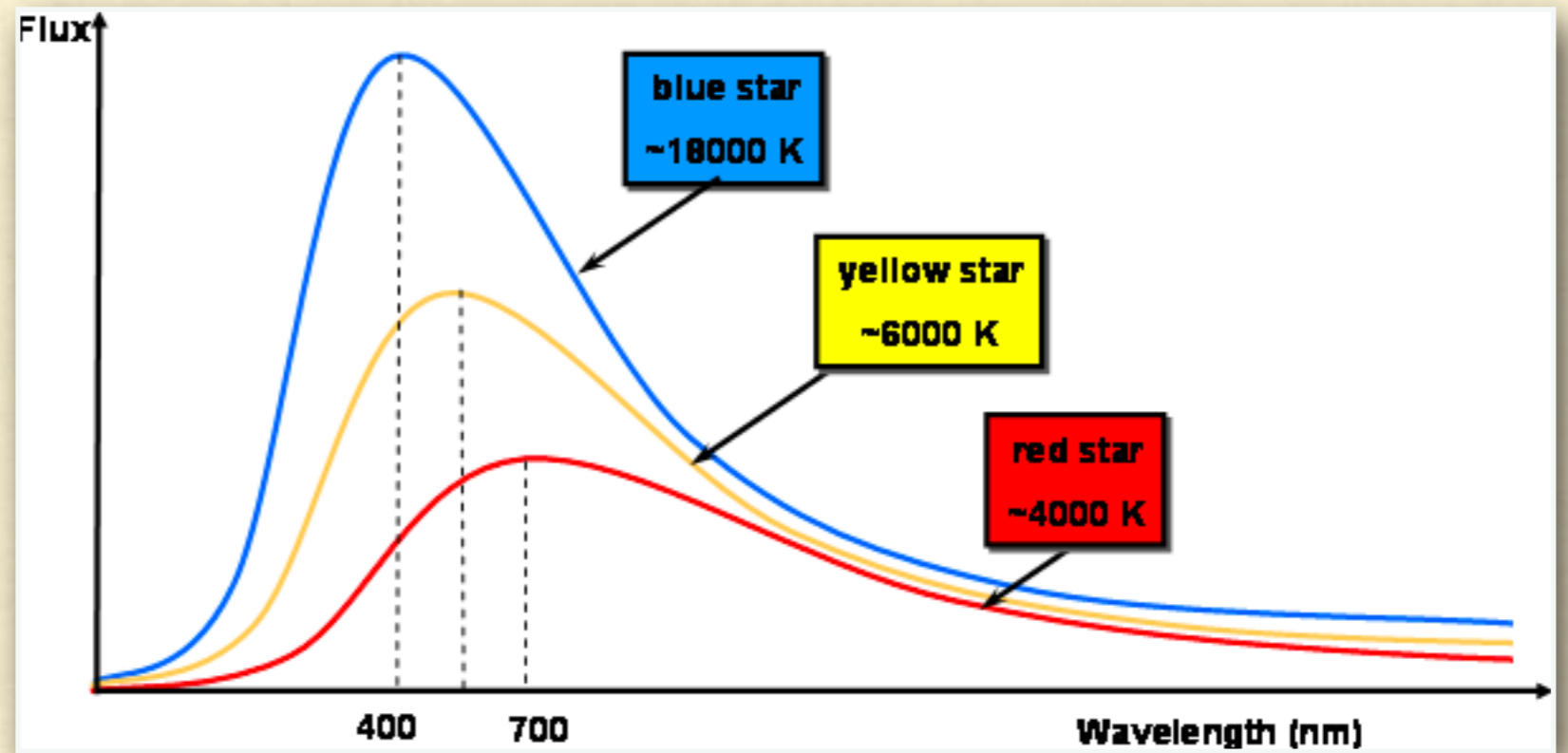
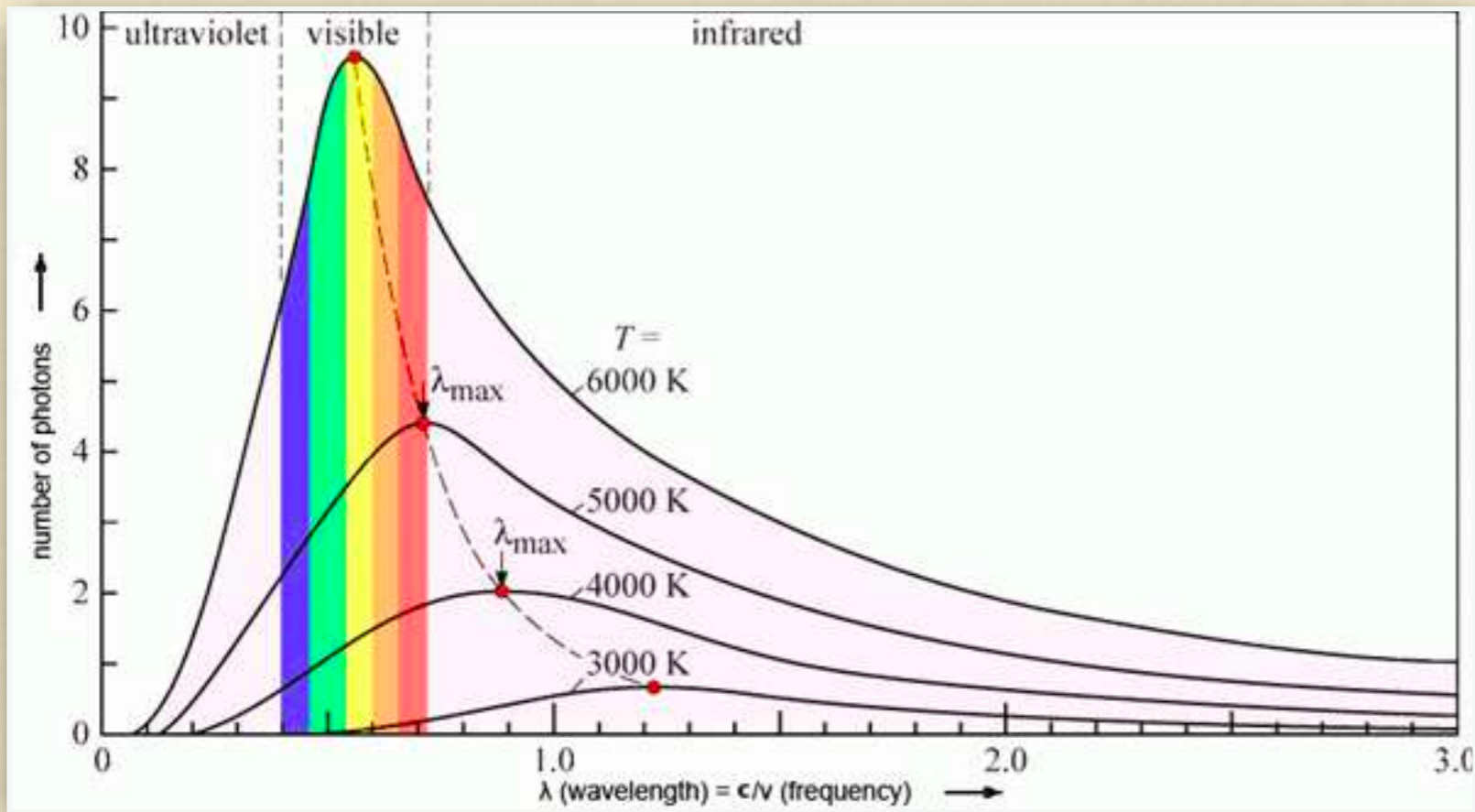
$$300 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1 \text{ } \mu\text{m},$$

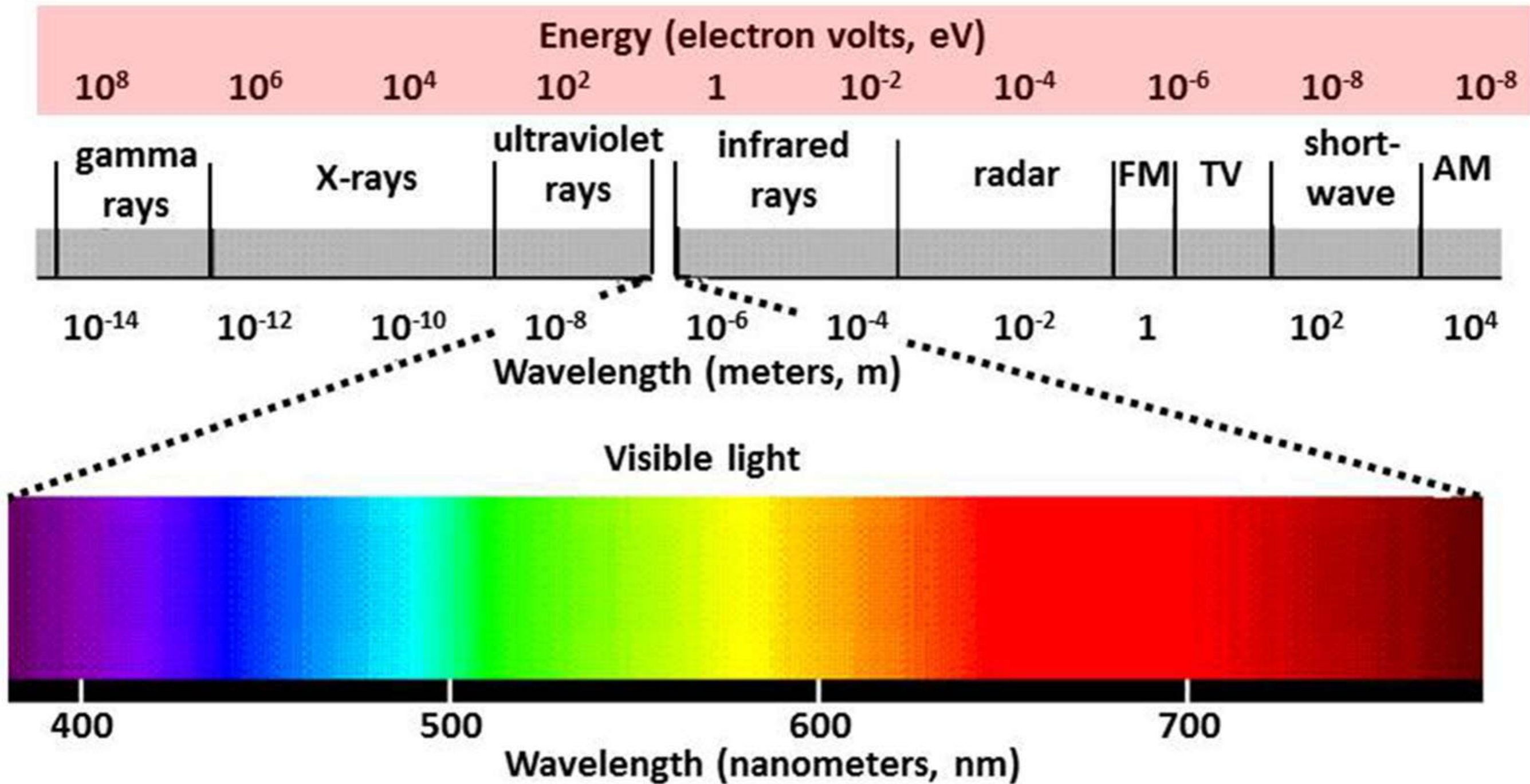
lo que corresponde a frecuencias entre 3×10^{14} y 10^{15} Hz. La radiación formada por estos fotones es conocida como “**luz visible**”.



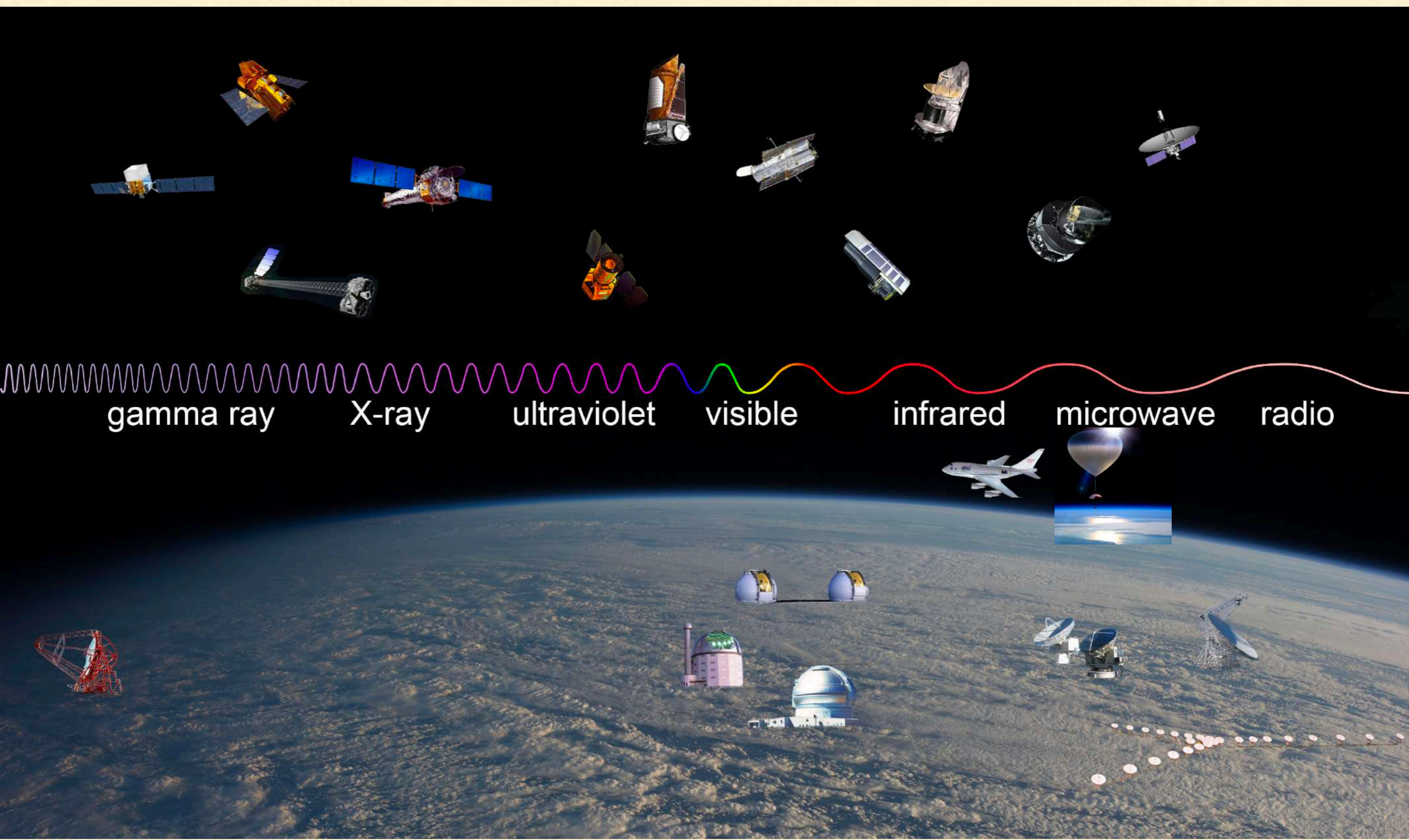
Solar Radiation Spectrum







Los fotones rojos tienen aproximadamente 1.8 electrón-Volt (eV) de energía, mientras que cada fotón azul transmite aproximadamente 3.1 eV.



gamma ray

X-ray

ultraviolet

visible

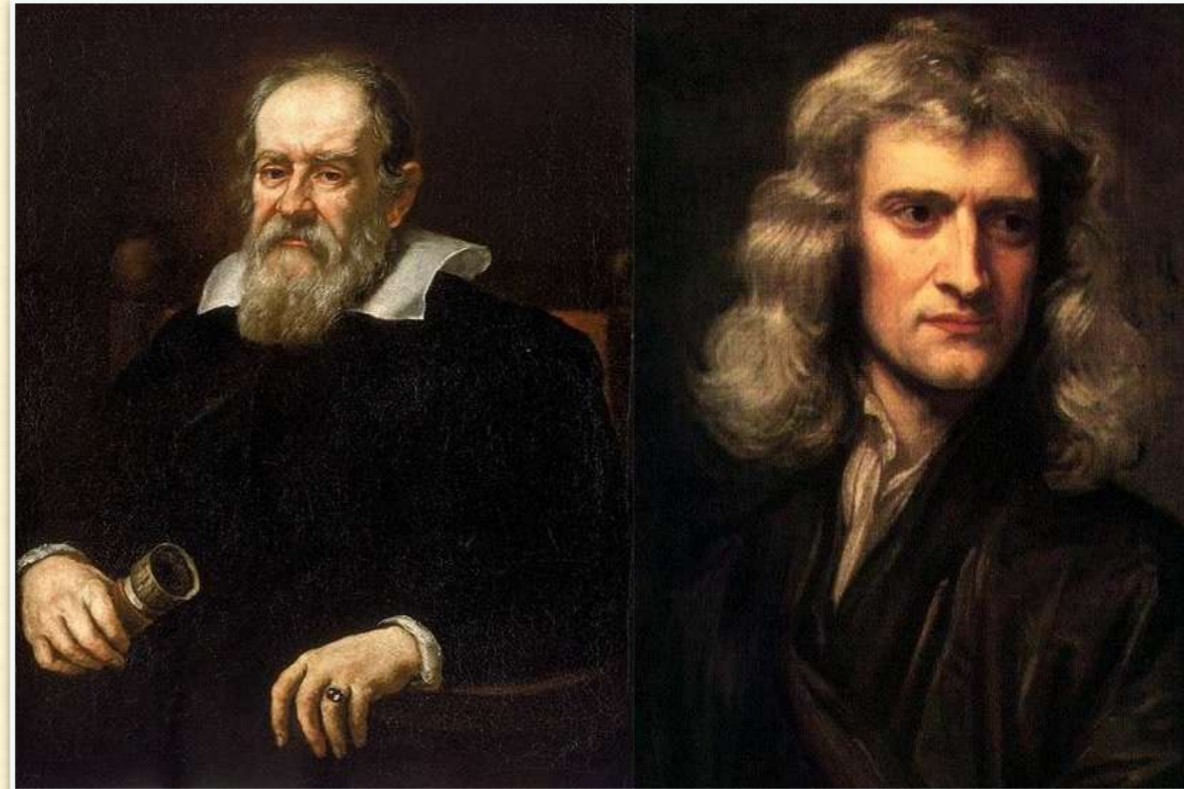
infrared

microwave

radio

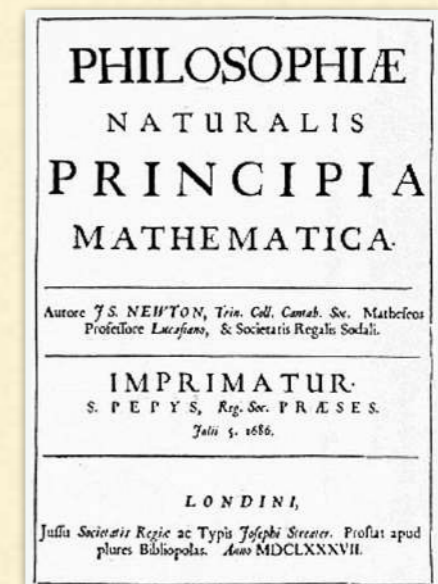
¿Qué es la astrofísica relativista?

Estado de la Física a fines del siglo XIX



1564-1642

1643-1727



Mecánica clásica: la masa se conserva, la energía se conserva, el momento se conserva. El cambio de movimiento de la materia se debe a interacciones locales entre cuerpos, excepto para la gravitación, que parece actuar a distancia.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) + \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E + p)) = 0 \quad E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad p = \rho w$$

Las ecuaciones anteriores representan la conservación de la masa, el momento y la energía.

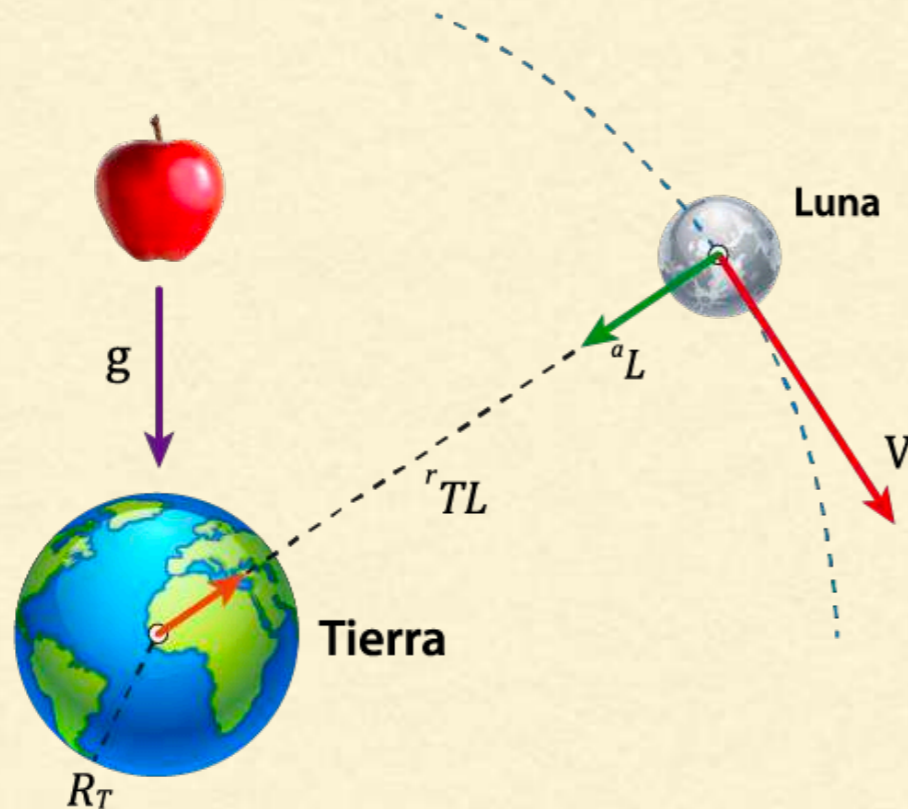
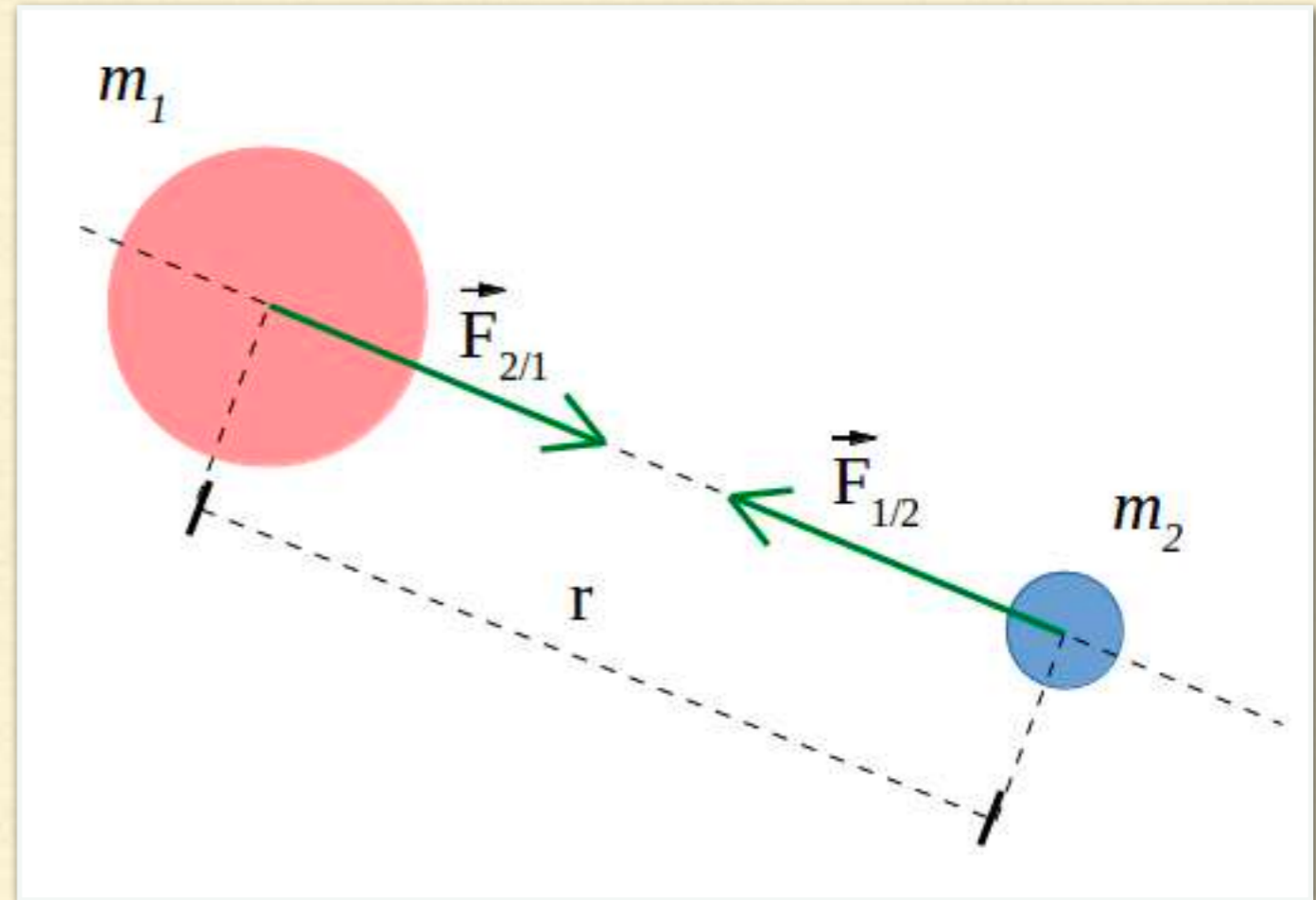
$$a_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad \text{Velocidad del sonido.}$$

Ecuación de Navier-Stokes (incompresible):

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{Variation}} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Convection}} - \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{-\nabla w}_{\text{Internal source}} + \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{External source}} \cdot \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) \equiv \nabla w$$

Gravitación Newtoniana: acción a distancia

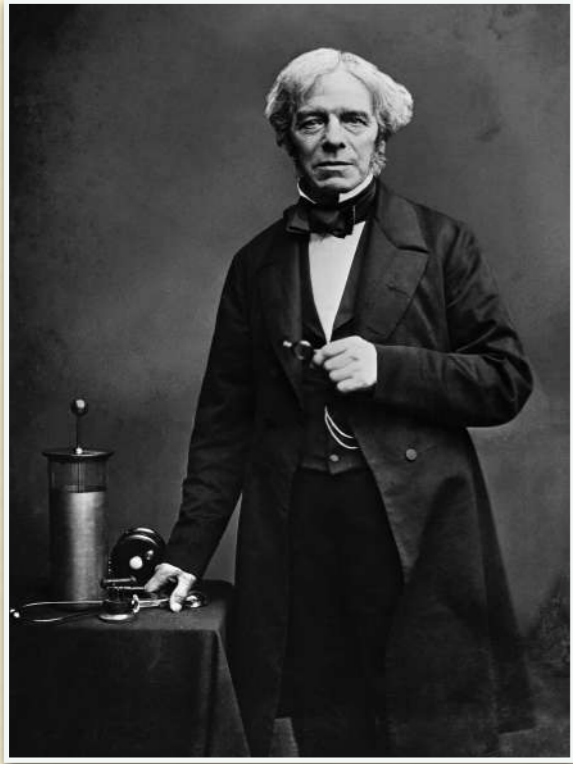
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$
$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}$$
$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}$$



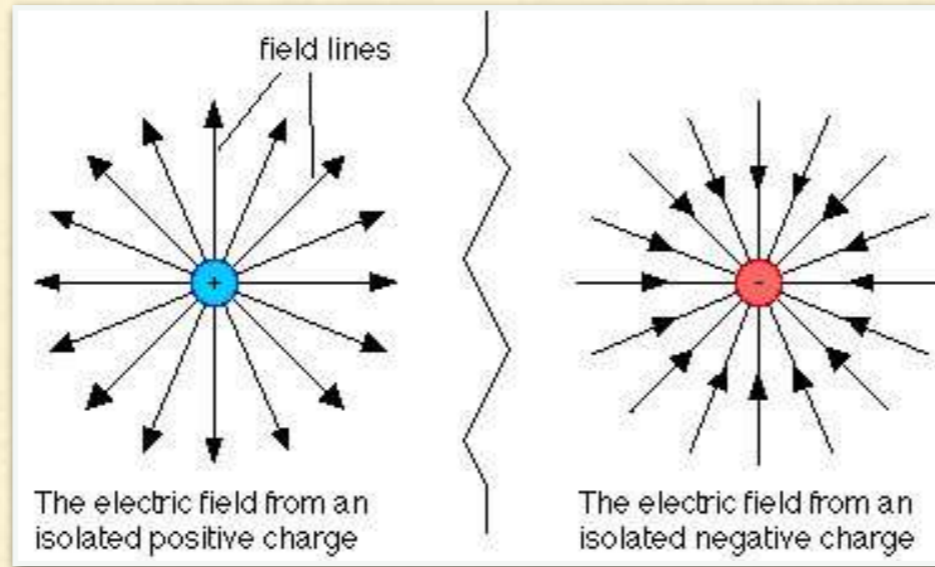
Las fuerzas sobre una partícula concreta debida a otras partículas depende de las posiciones de esas otras partículas en el mismo instante.

Michael Faraday introduce el concepto de campo

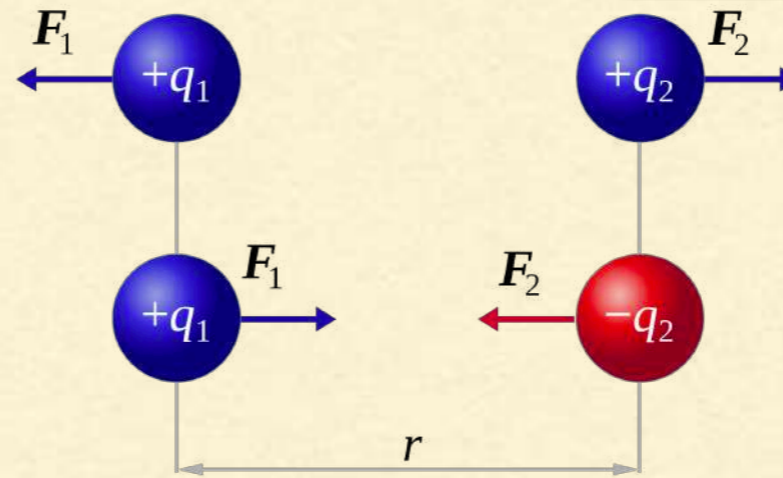
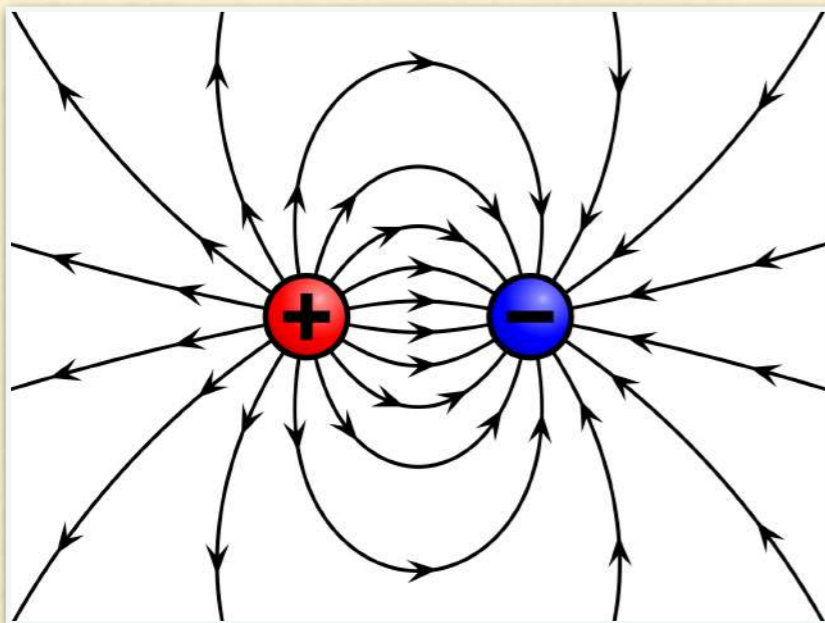
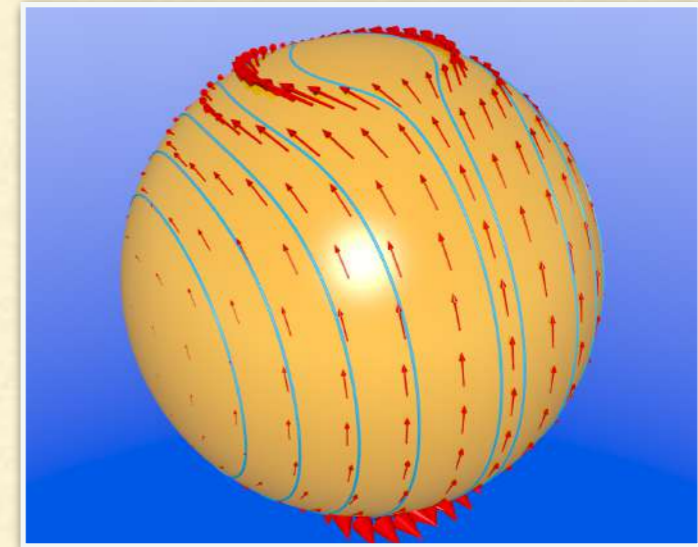
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$



1791-1867



Campo: sistema físico con infinitos grados de libertad.



$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \nabla \phi_1$$

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q_1}\|}$$

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$

James Clerk Maxwell (1831-1879): electromagnetismo



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{Gauss' Law})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{Gauss' Law for Magnetism})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{Faraday's Law})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampere's Law})$$

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]$$



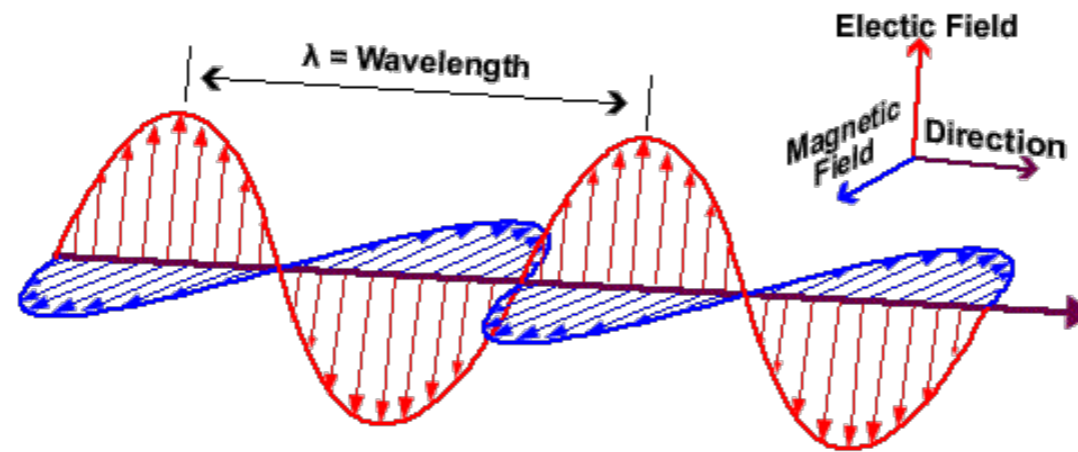
Henrik Lorentz (1853 – 1928)

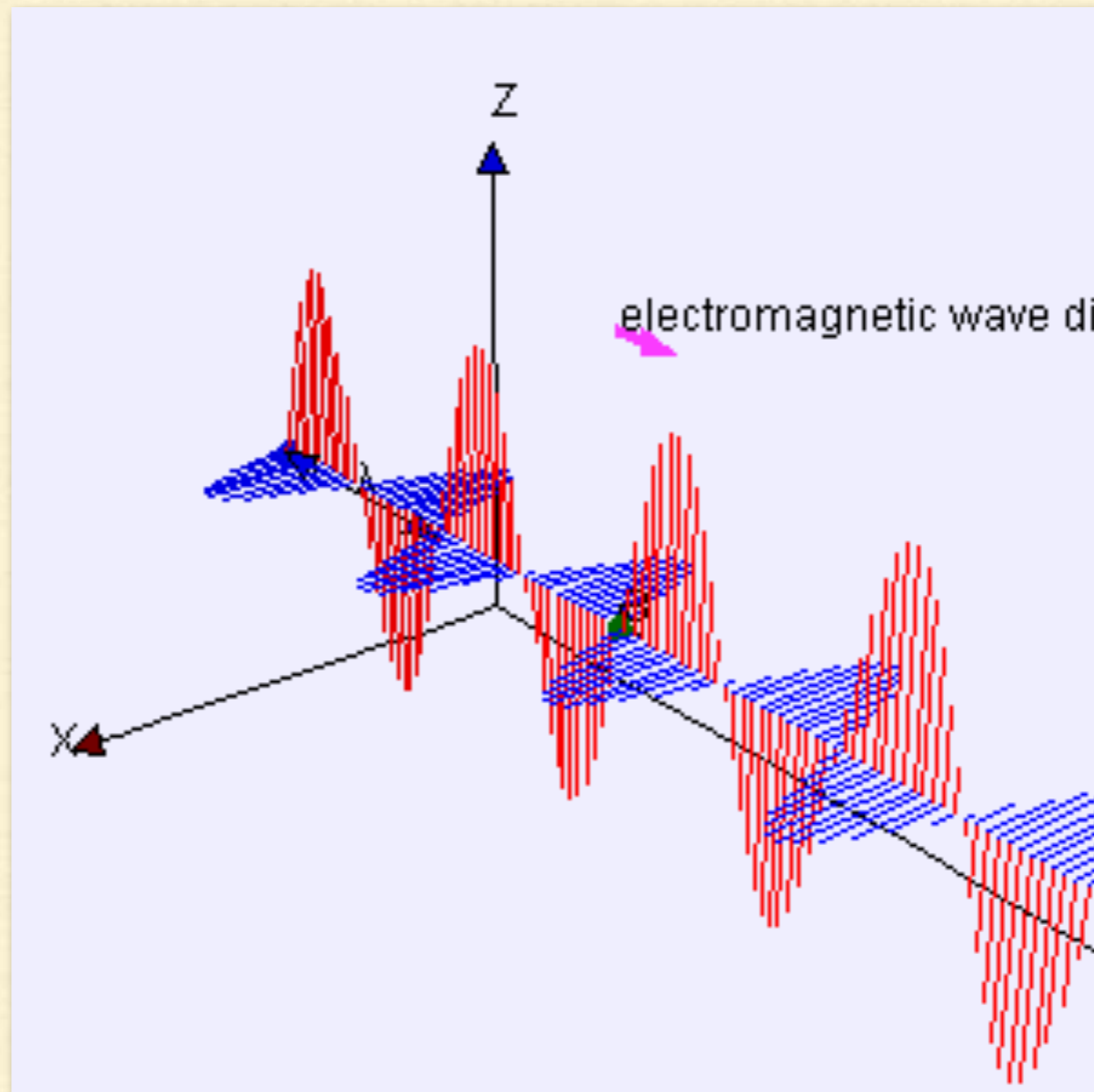


Oliver Heaviside (1850 – 1925)

Ondas electromagnéticas

$$\left(c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0$$
$$\left(c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0$$

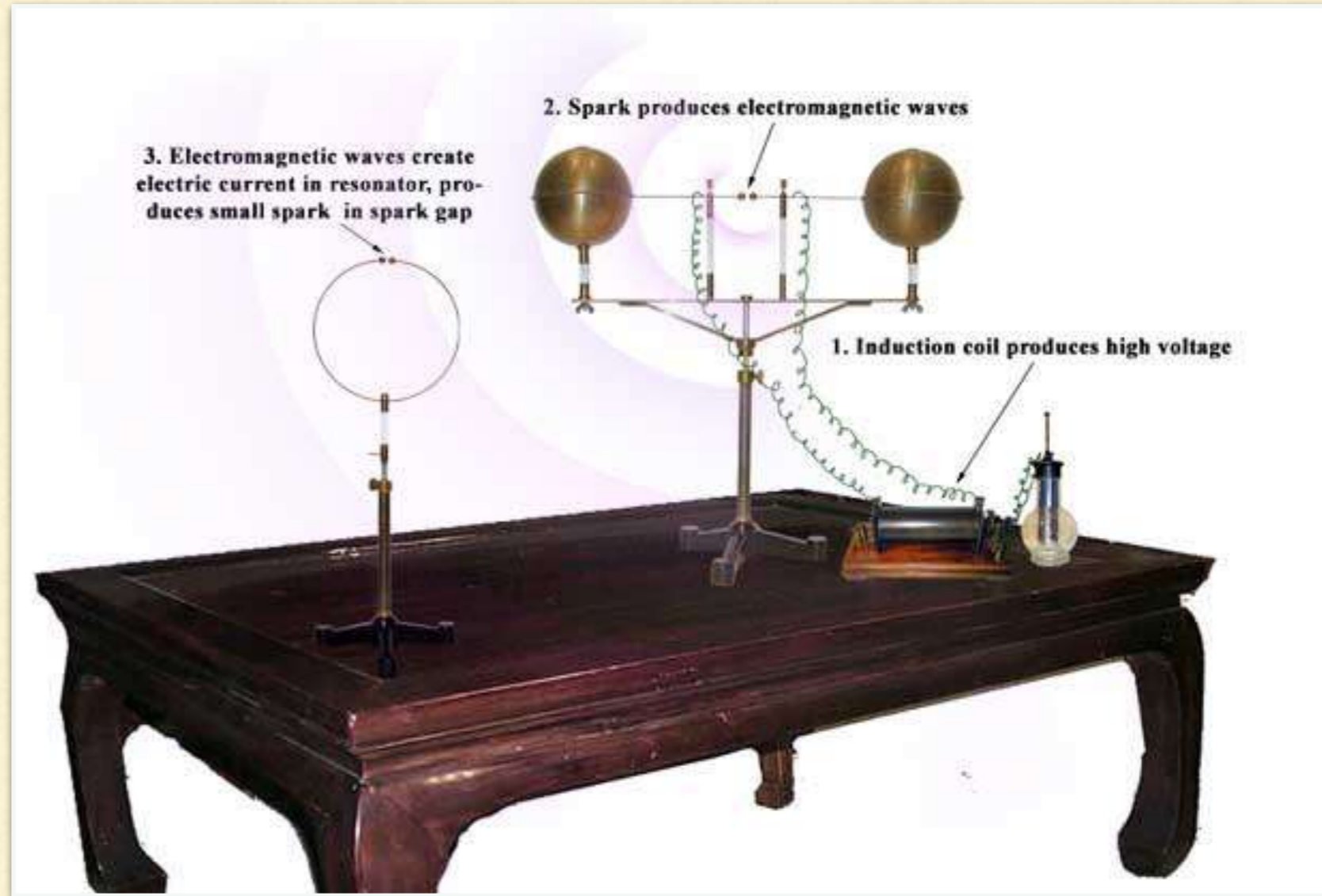




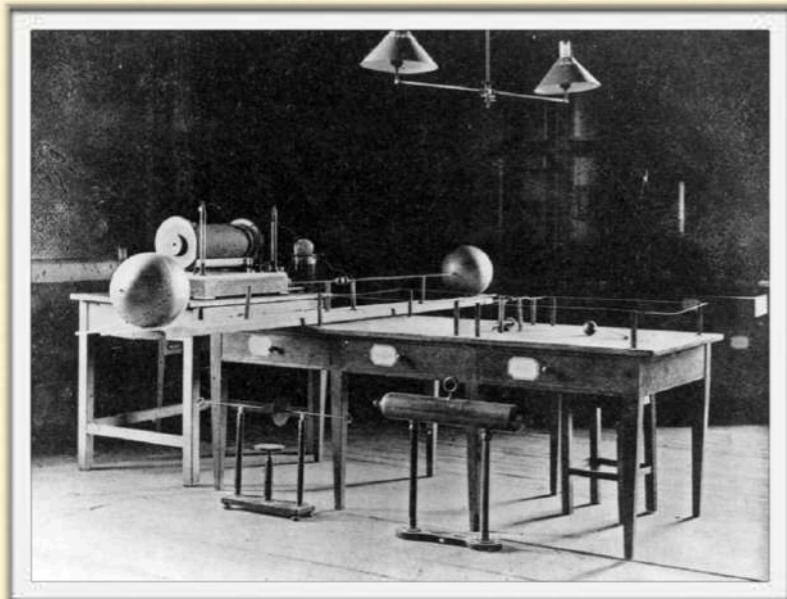
Las ondas electromagnéticas existen y se propagan por el vacío



Heinrich Hertz 1857-1894



1887



Hertz's lab

Campo gravitazionale Newtoniano

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -GM \frac{\hat{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R}|^2} = -\nabla \Phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho \quad \phi(r) = \frac{-Gm}{r}$$

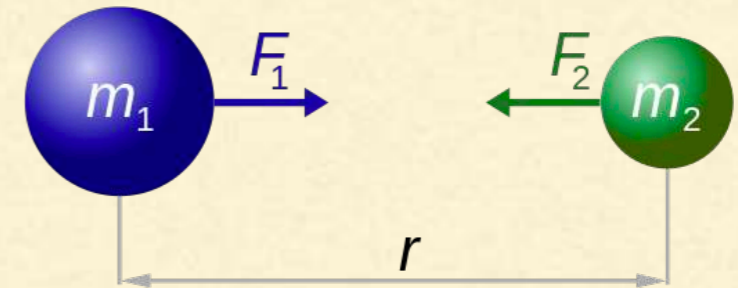
$$\epsilon_{0g} = \frac{1}{4\pi G}, \quad \mu_{0g} = \frac{4\pi G}{c_g^2} \Rightarrow c_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{0g} \mu_{0g}}}$$

$$\nabla^2 \phi_g - \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial t^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_{0g}}$$

Heaviside 1893

$$\nabla^2 \mathbf{g} = \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2}$$



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

gravito MLEs of HG

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho_g = -\frac{\rho_g}{\epsilon_{0g}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = +\mu_{0g} \mathbf{j}_g - \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = +\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_g [\mathbf{g} - \mathbf{u} \times \mathbf{b}]$$

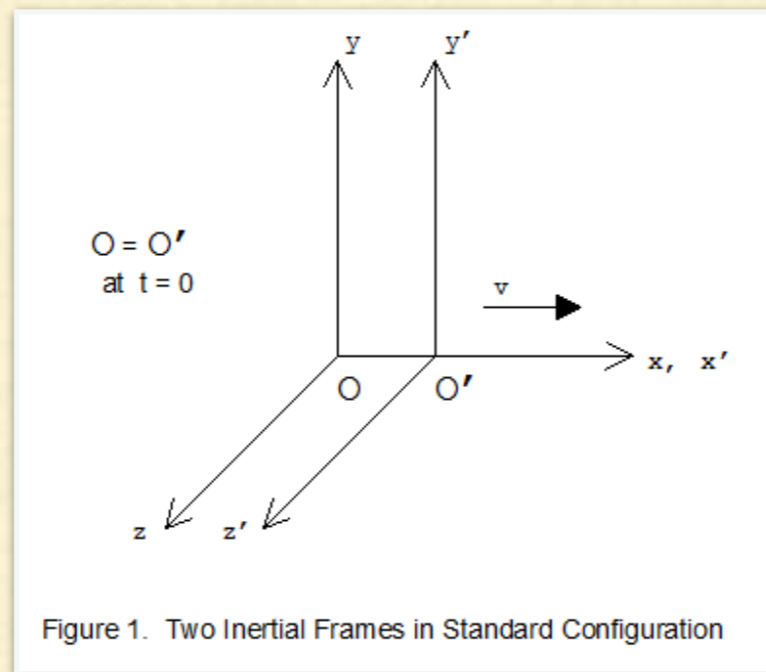
$$\mathbf{b} = -\nabla \times \mathbf{A}_g$$

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi_g - \frac{\partial \mathbf{A}_g}{\partial t}$$

Tensión entre la mecánica clásica y la electrodinámica

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

Transformaciones de Galileo



The Lorentz Transformation
(for motion in the x-direction)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Hendrik Lorentz (1853-1928)

Electrodinámica de los cuerpos en movimiento

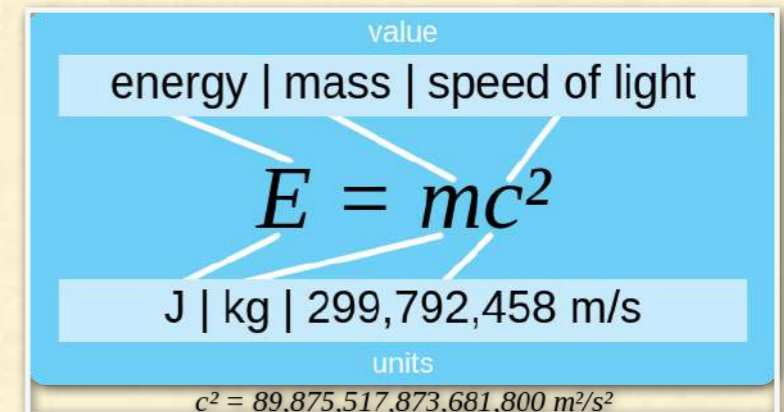
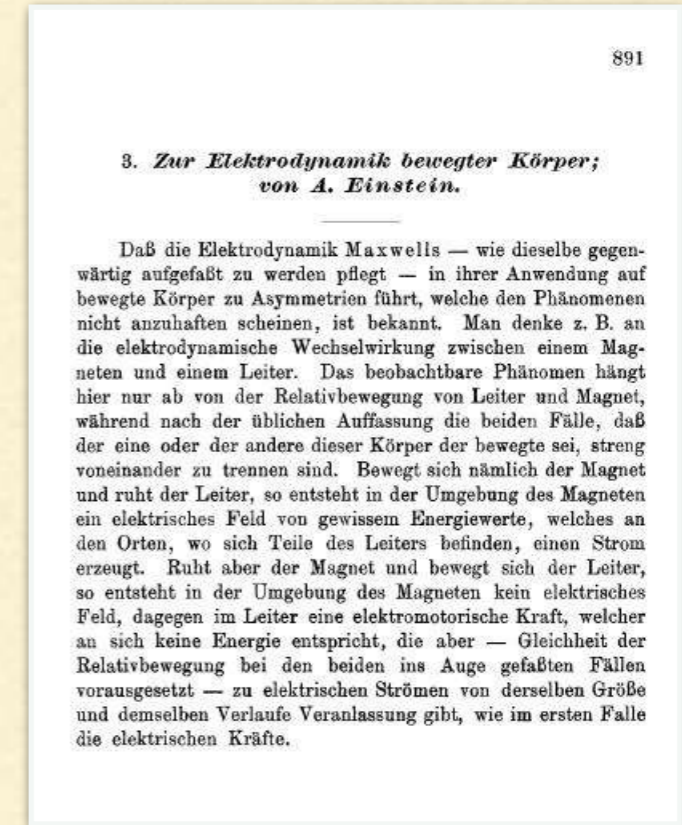


Albert Einstein

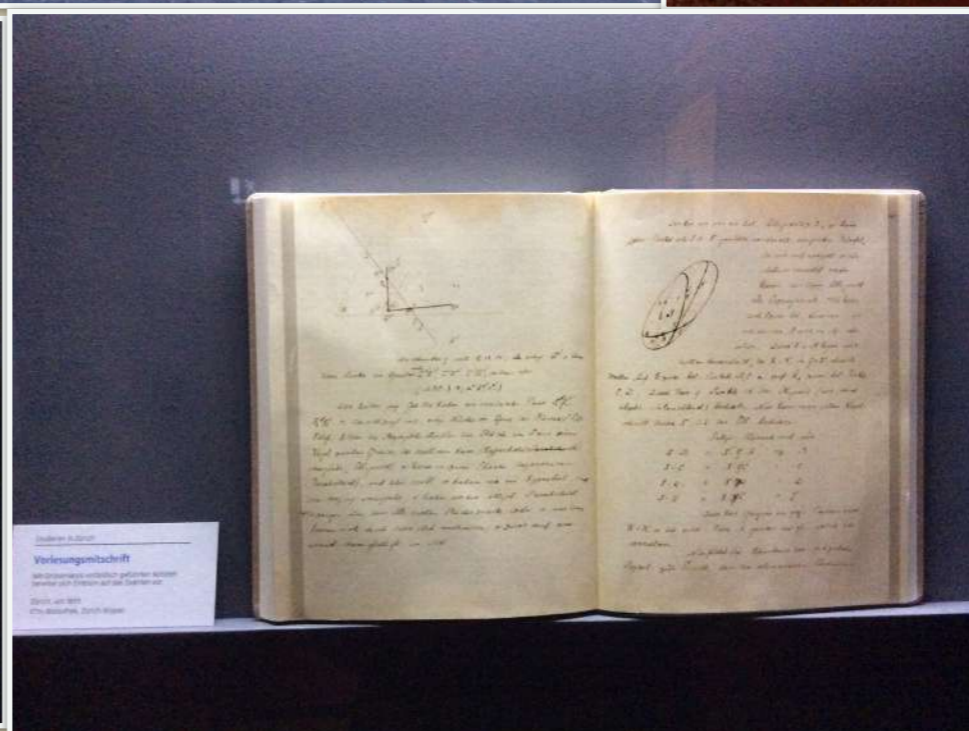
$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$



- **Primer postulado.** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
- **Segundo postulado.** La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, c , que es independiente del movimiento de la fuente de luz.



$$L = ct_0$$

$$(ct)^2 = L^2 + (Vt)^2$$

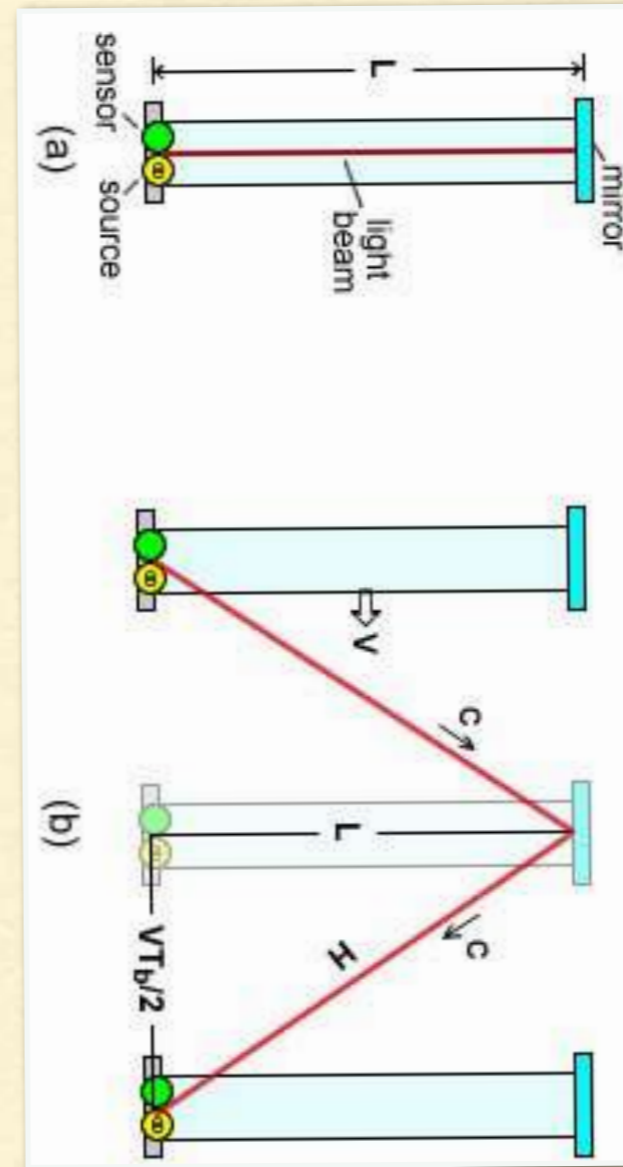
$$L^2 = (ct)^2 - (Vt)^2$$

$$L/c = t[1 - (V/c)^2]^{1/2}$$

$$L = ct_0$$

$$t_0 = t\sqrt{1 - (V/c)^2}$$

$$t = \gamma t_0$$

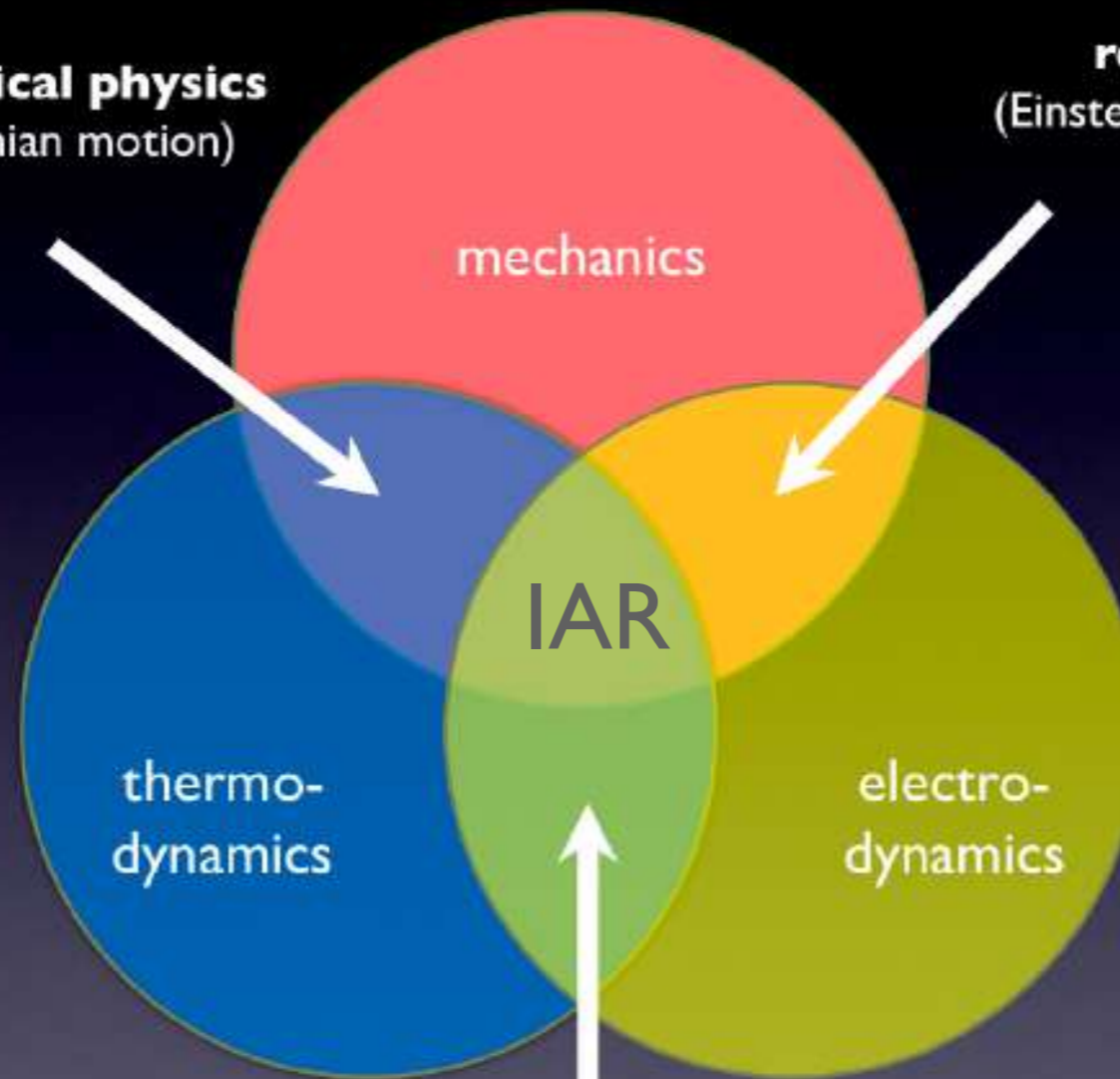


El tiempo es diferente en ambos sistemas.
No hay simultaneidad absoluta.

Borderline Problems of Classical Physics

atomism & statistical physics
(Einstein 1905: Brownian motion)

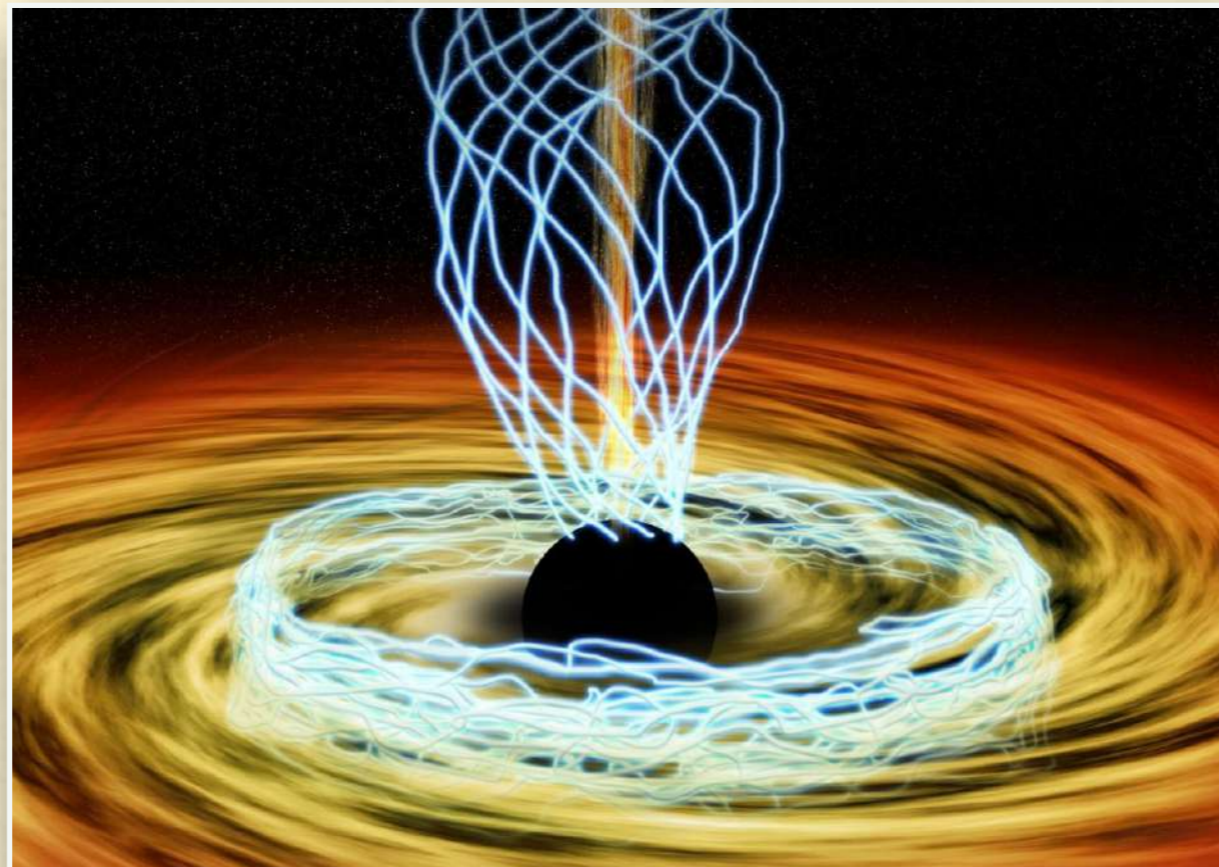
relativity physics
(Einstein 1905: electrodynamics
of moving bodies)

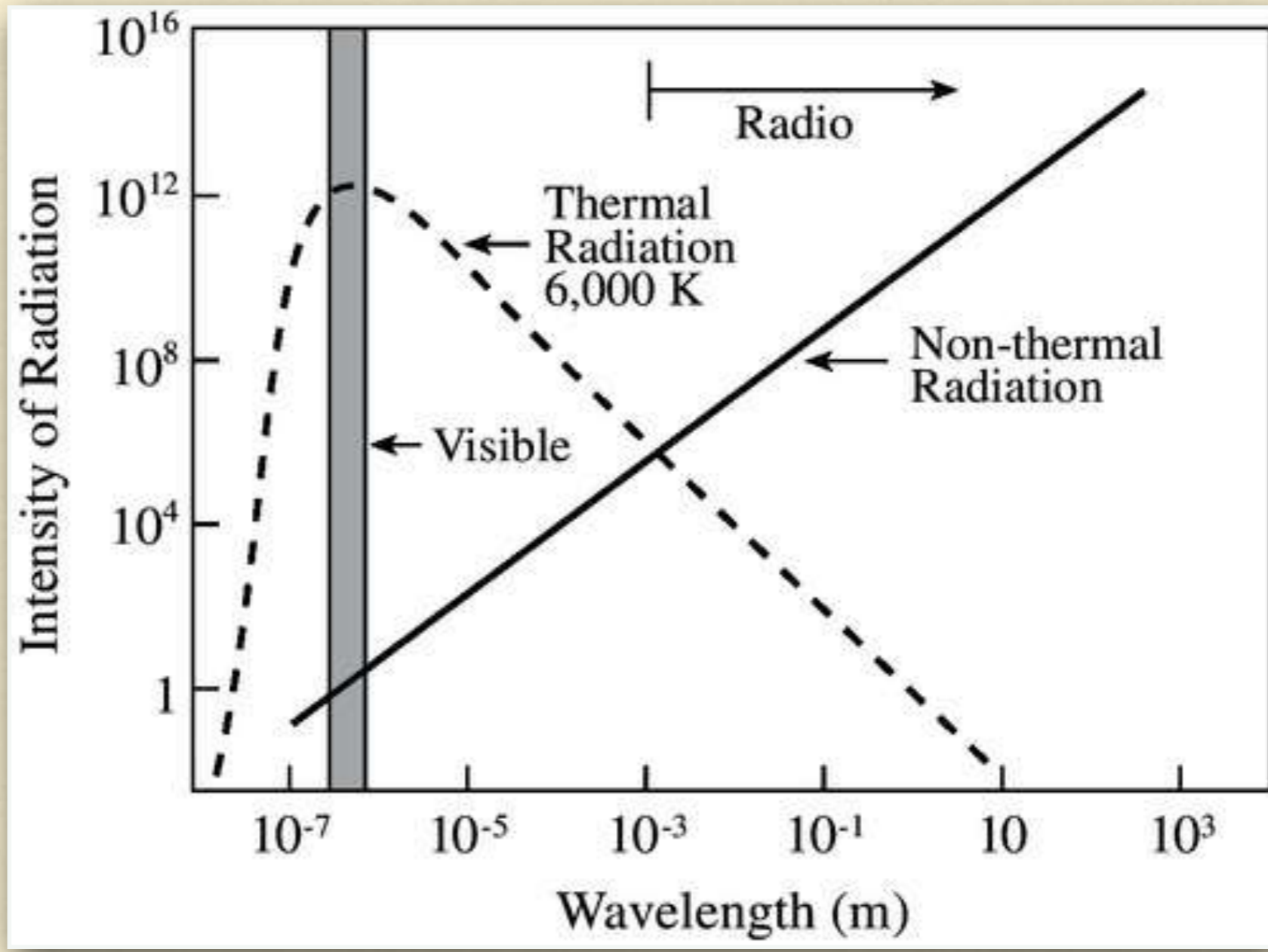


quantum physics
(Planck 1900: black body radiation law)

La **astrofísica relativista** investiga los sistemas astrofísicos donde se genera radiación de origen no-térmico. Esta radiación es producida por partículas relativistas, que están fuera del equilibrio termodinámico.

El universo no-térmico, invisible al ojo humano, es donde se dan las manifestaciones más extremas de la naturaleza.

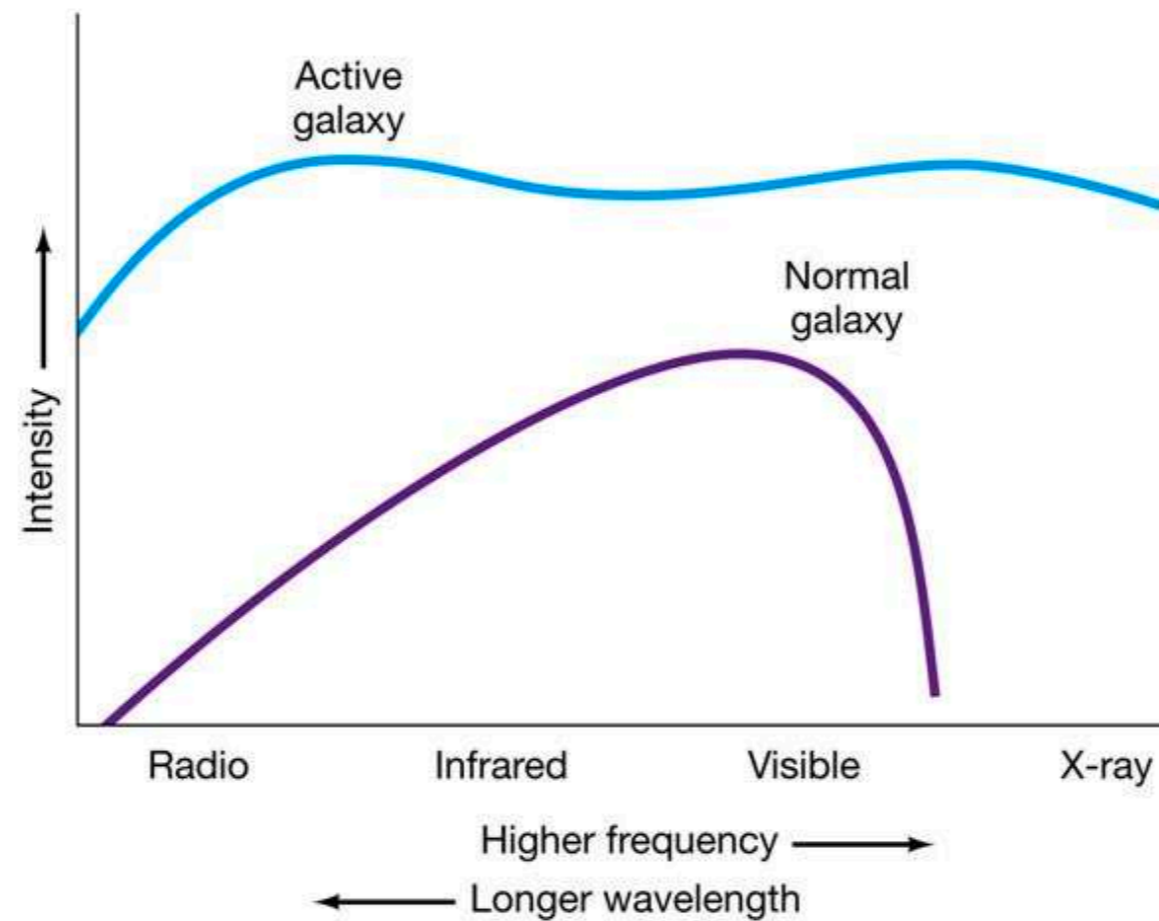




Thermal vs. Non-Thermal Spectra

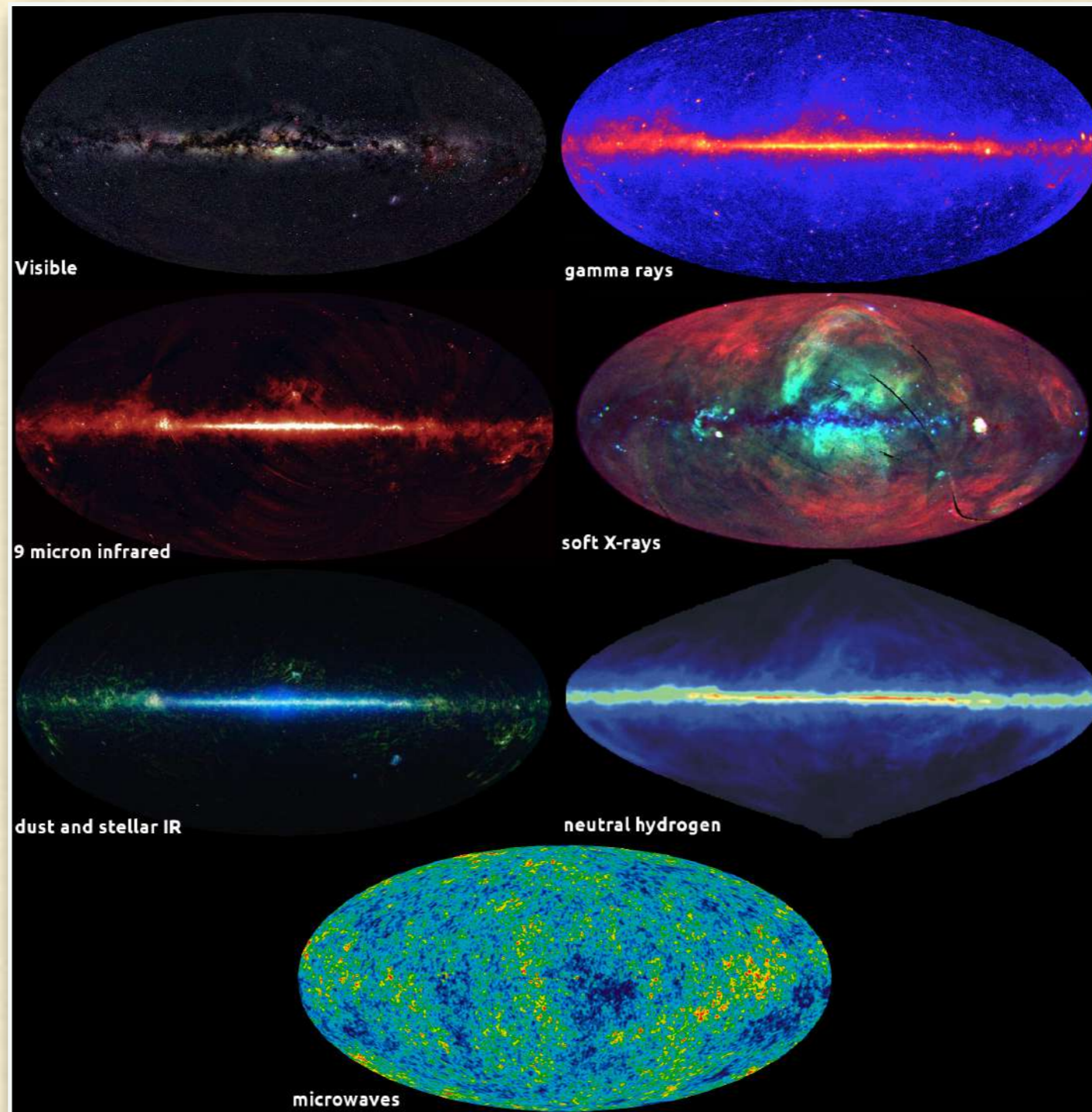
Normal mostly from stars,

Active mostly synchrotron

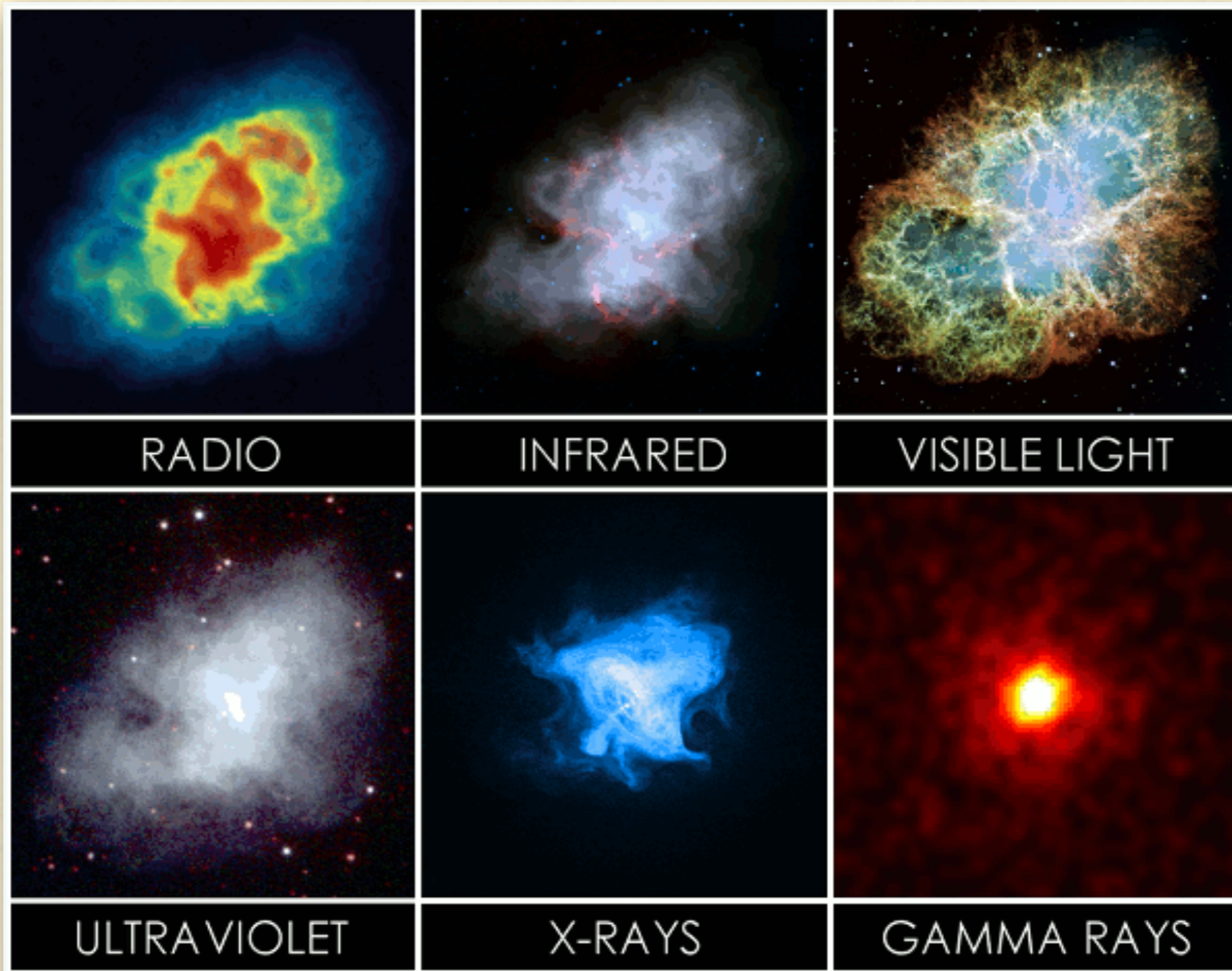


Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

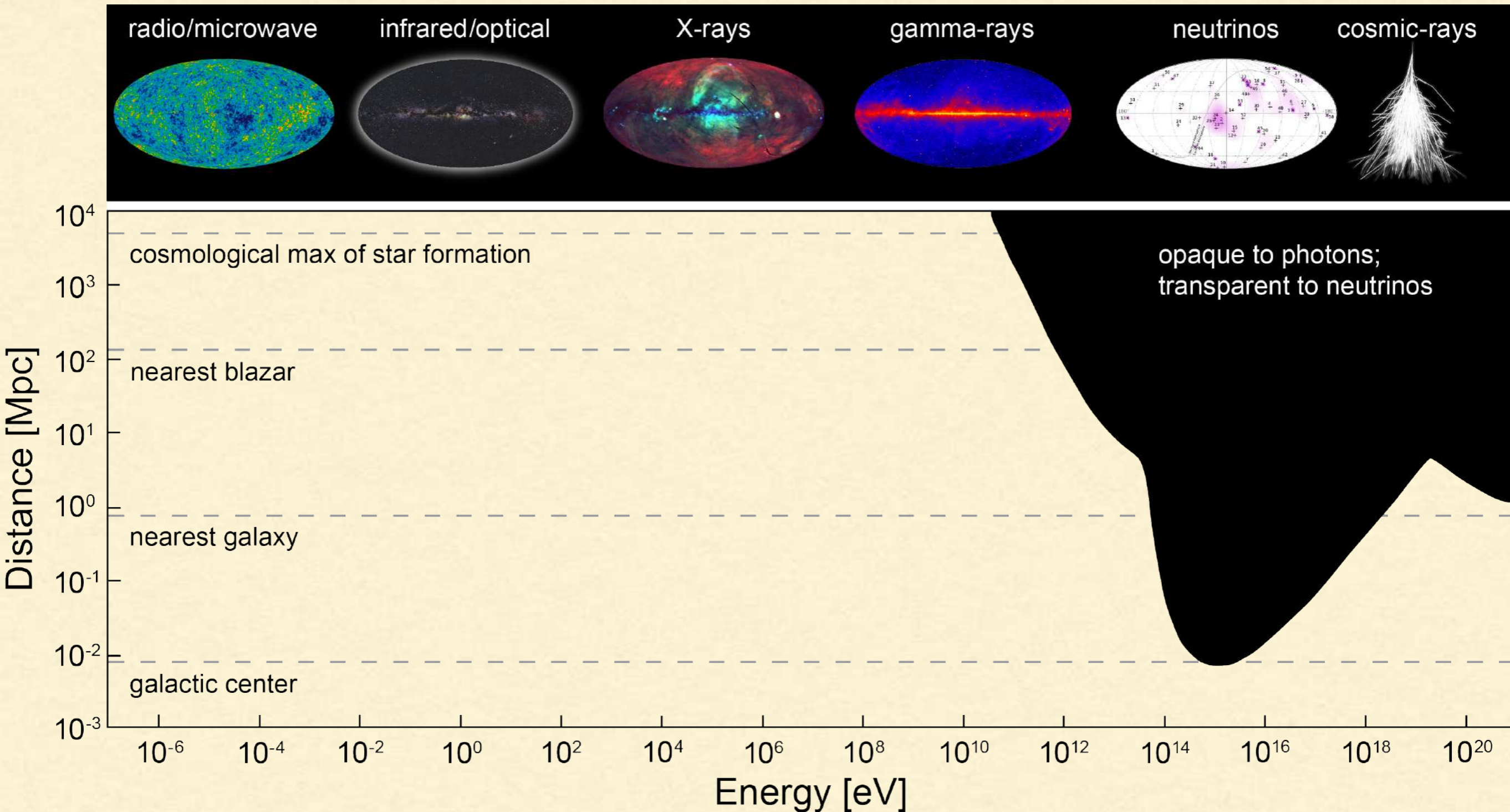
Multi-wavelength astronomy → New astrophysics



La nebulosa del Cangrejo



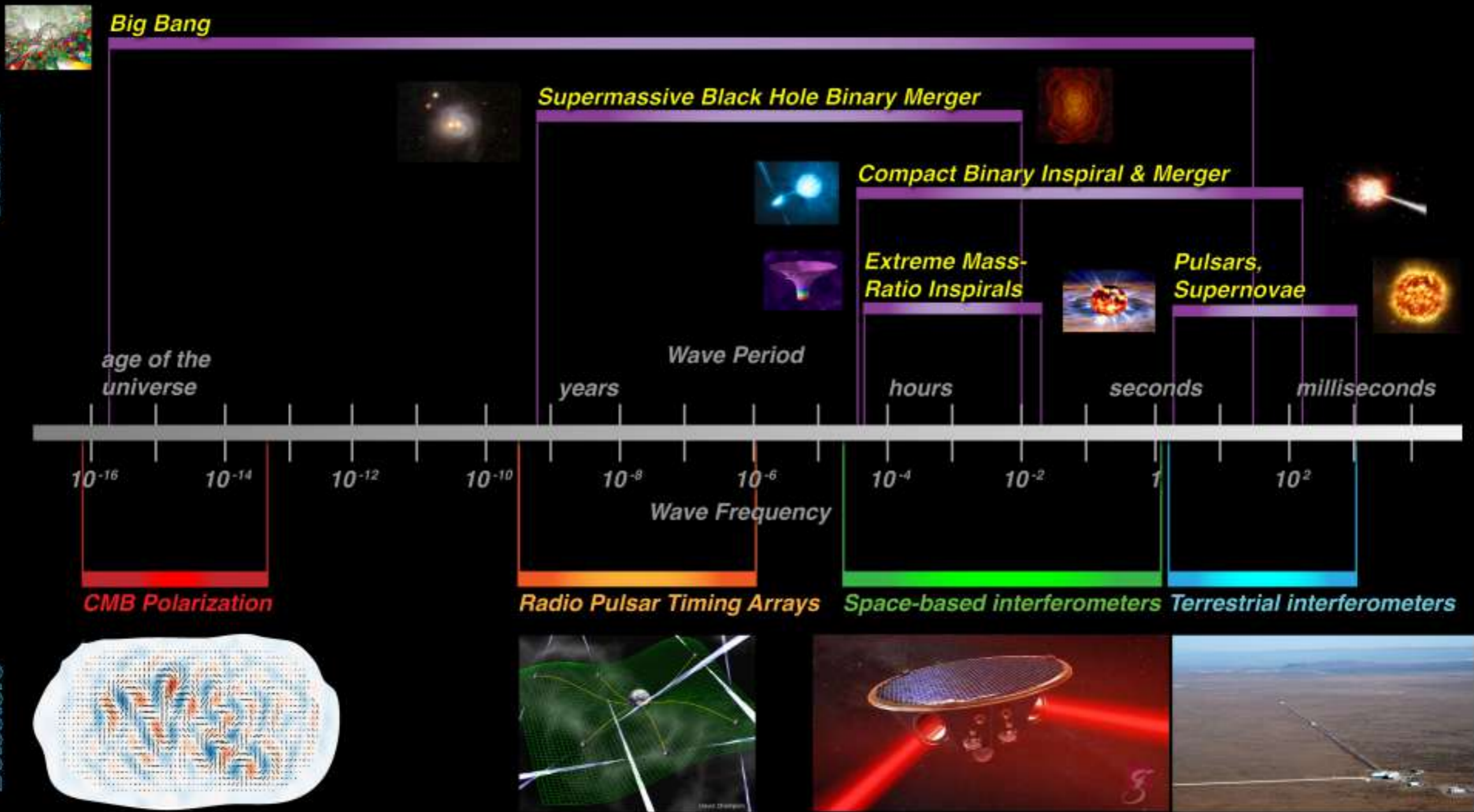
Otras señales que llegan del cosmos: Astronomía de neutrinos, ondas gravitacionales, rayos cósmicos



The Gravitational Wave Spectrum

Sources

Detectors



El espacio-tiempo

El espacio-tiempo es un sistema físico que “incluye” a todos los eventos.

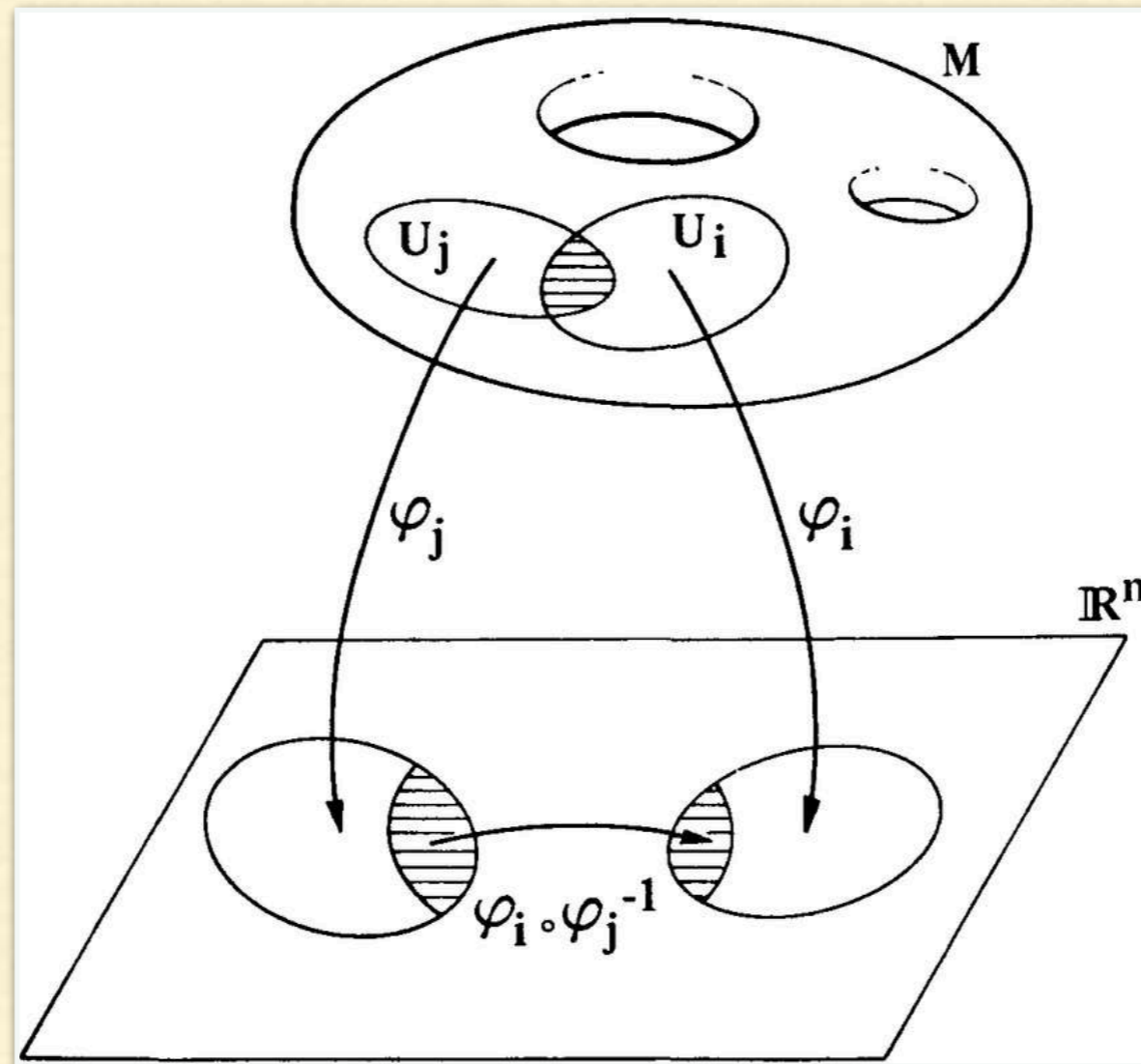
Todo lo que ha ocurrido, ocurre o ocurrirá a alguna cosa es un punto (elemento) del espacio-tiempo. Un proceso (sucesión de cambios) es una línea (o parte) del espacio-tiempo.

Al ser el espacio-tiempo una colección de eventos y no un mero conjunto es una entidad física, y no un concepto matemático.



El espacio-tiempo se representa por una variedad real cuadri-dimensional diferenciable.

Una *variedad real* es un conjunto que puede ser completamente cubierto por subconjuntos cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia 1 a 1 con subconjuntos de R^4 (si la variedad es cuadri-dimensional; R^n si es n -dimensional).



M es una variedad real n -dimensional diferenciable si y solo si:

1. M es un conjunto.
2. $\exists O/O = \{O_\alpha \subset M\}$.
3. Todo elemento $p \in M$ es tal que $\exists O_\alpha \in O/p \in O_\alpha$.
4. $\forall \alpha \exists \Phi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$, con U_α subconjunto abierto de R^n .
5. Si existen dos conjuntos O_1 y $O_2/O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ ($\emptyset =$ vacío) $\Rightarrow \exists \Phi_2 \cdot \Phi_1^{-1}$ que pone en correspondencia 1 a 1 los puntos de $U_1 \subset R^n$ con los de $U_2 \subset R^n$.

De esta definición se desprende por qué se postula una variedad para representar el espacio-tiempo: independientemente de la estructura geométrica de éste, pueden adoptarse coordenadas (números reales) para describir procesos que ocurren en él.

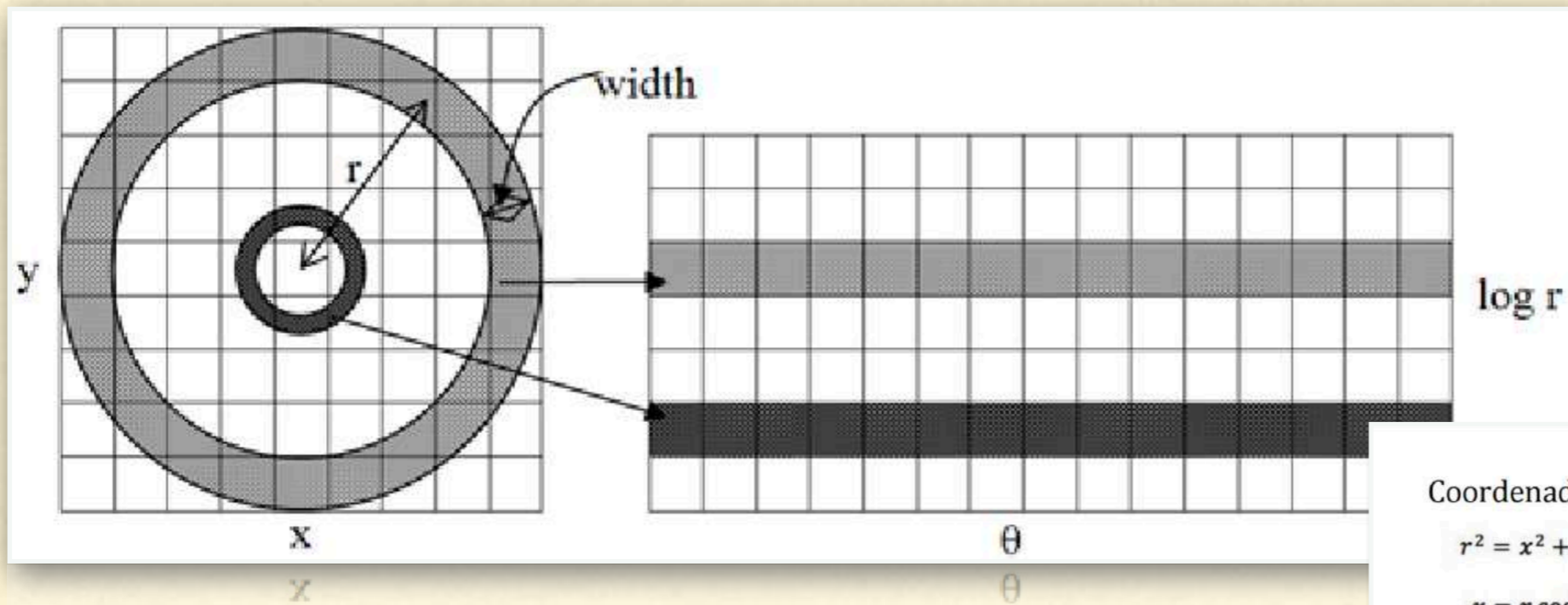
Dado un elemento $p \in M$ podemos describirlo usando distintos sistemas de coordenadas. Por ejemplo,

$$p \longleftrightarrow \{x^\mu\}$$

$$p \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$$

$$\exists x'^\mu = x'^\mu(\{x^\mu\})$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$.



Coordenadas cartesianas \rightarrow **Coordenadas polares**

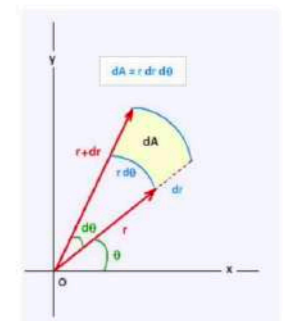
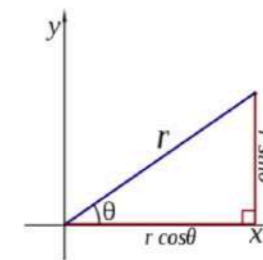
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dA = r dr d\theta$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$



$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{x}{r} \right)$$

Objetos sobre la variedad

Los objetos sobre la variedad se definen por sus propiedades de transformación frente a cambios de coordenadas $\{x^\mu\} \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$. El objeto más simple es un *escalar*:

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu).$$

El *valor* del escalar no cambia cuando el sistema coordenado cambia de $\{x^\mu\}$ a $\{x'^\mu\}$. Notar que la forma ϕ sí puede cambiar.

Introduzcamos ahora un objeto de cuatro componentes A^μ . Si ante un cambio de coordenadas $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\mu\}$, este se transforma como

$$A'^\mu = \sum_{\nu=1}^4 A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu},$$

entonces A^μ es un *vector contravariante*.

$$A'^{\mu} = A^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}.$$

Ejemplo:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}.$$

Los vectores *covariantes* se definen por medio de la siguiente ley de transformación ante cambios de coordenadas:

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu}.$$

Un ejemplo es el gradiente de un campo escalar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}.$$

Podemos definir tensores contravariantes (o covariantes) de rango arbitrario:

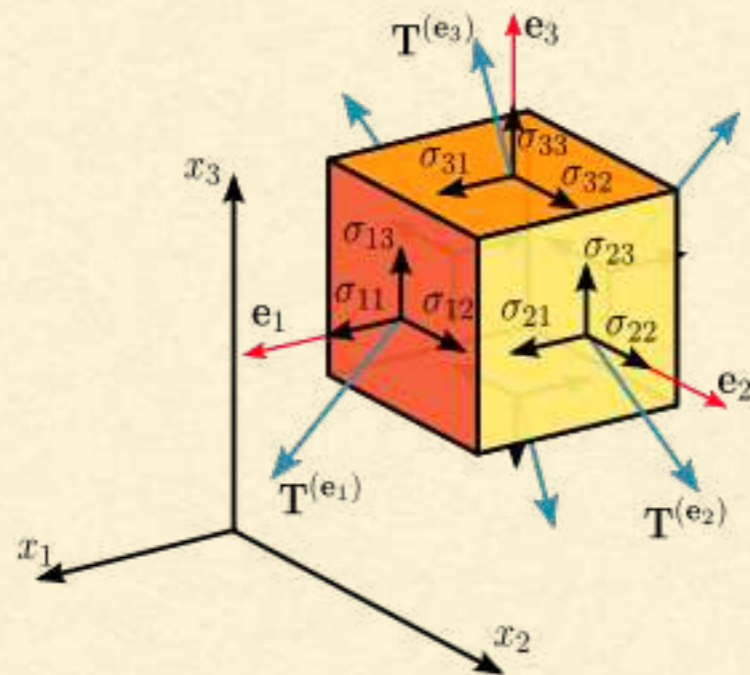
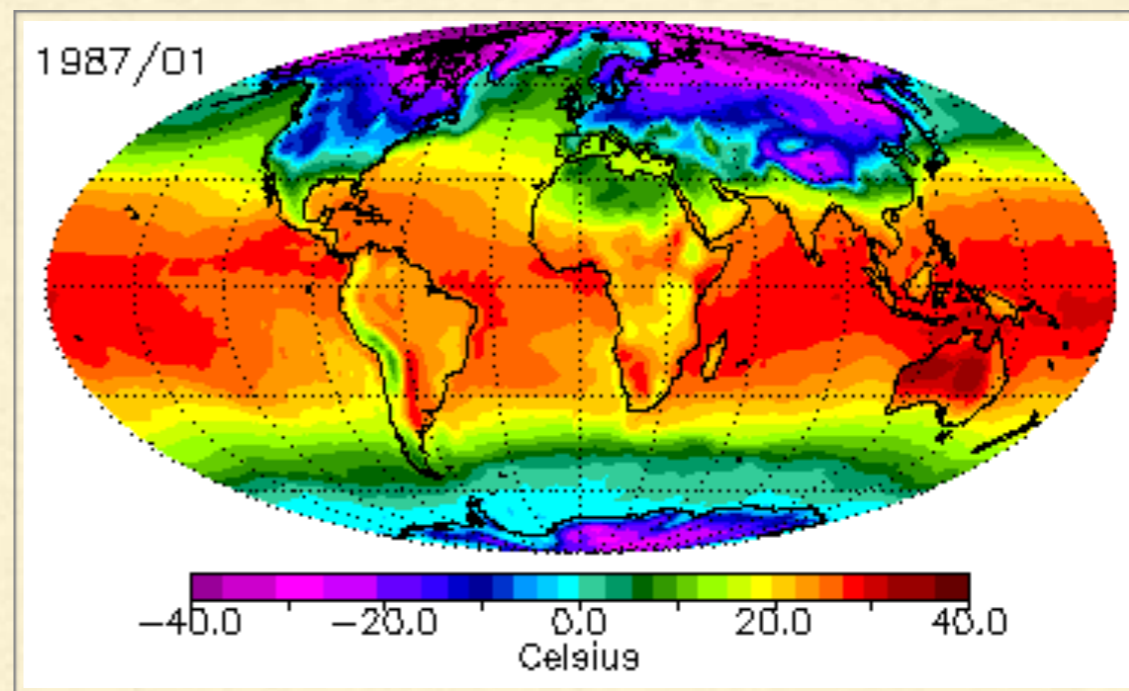
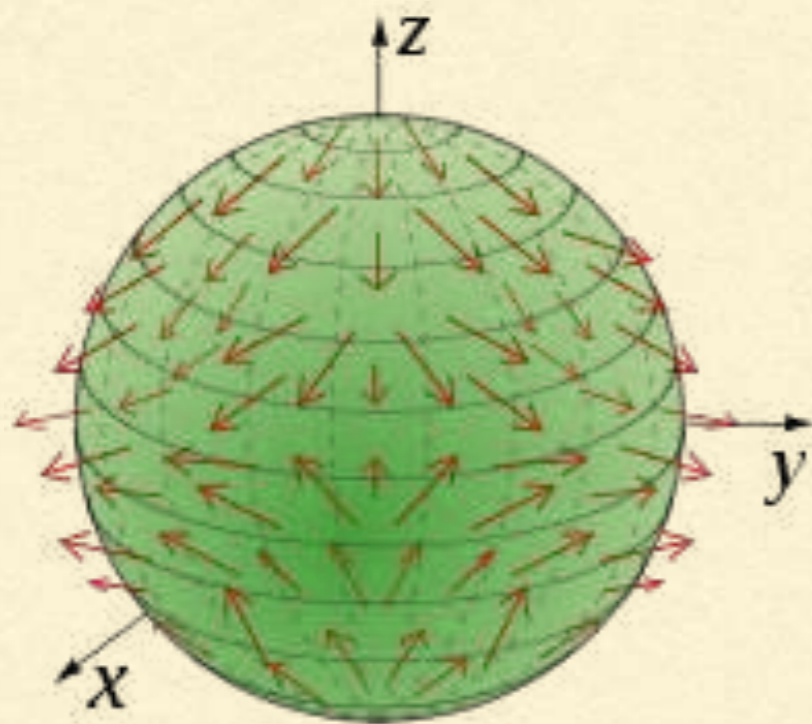
$$T' \underbrace{\dots \mu \dots}_{n} = \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \dots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \dots T_{\dots \sigma \dots} \underbrace{\dots \nu \dots}_{m}$$

El tensor T es, en este caso, n veces contravariante y m veces covariante.

Un campo tensorial definido sobre alguna región de la variedad es una asociación de un tensor de la misma variedad a cada punto de la región:

$$p \longrightarrow T_{\dots \nu \dots}^{\dots \mu \dots}(p),$$

donde $T_{\dots \nu \dots}^{\dots \mu \dots}(p)$ es el valor del tensor en p . El campo tensorial se llama continuo o diferenciable si las componentes del tensor lo son.



Estructura métrica

¿Cómo medimos distancias sobre la variedad?

Introducimos un tensor de rango 2 llamado *tensor métrico*. El mismo nos dice cómo calcular la distancia ds entre dos eventos arbitrariamente próximos ϵ_1 y ϵ_2 :

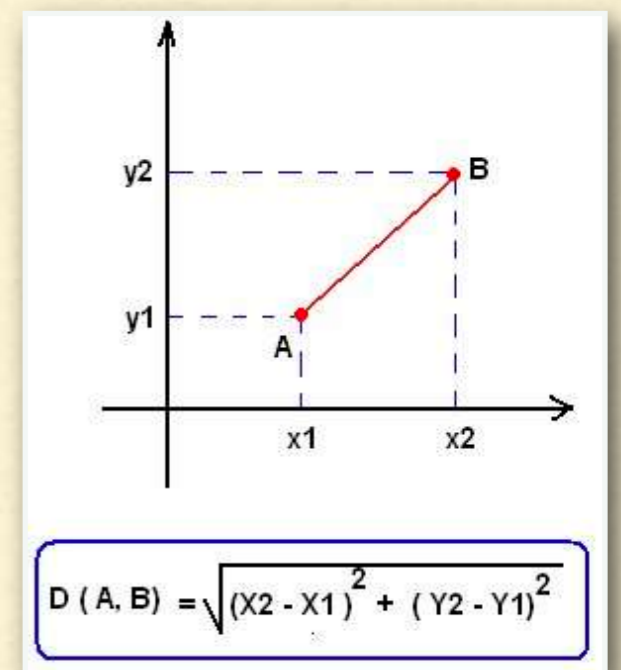
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. En un espacio-tiempo euclídeo, por ejemplo,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

y

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$



Minkowski propuso que el tensor métrico del espacio-tiempo es un tensor pseudo-euclídeo de rango 2 y traza -2 :

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

conocido como *tensor de Minkowski*. Es inmediato establecer que

$$\eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}.$$

En este espacio-tiempo de Minkowski el intervalo (distancia infinitesimal) entre dos eventos resulta ser:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \end{aligned}$$

La geometría resultante es *pseudoeuclídea*

A las tres coordenadas que aparecen con signo negativo en el intervalo se las suele denominar *espaciales*:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (1)$$

La coordenada que aparece con el signo opuesto es llamada *temporal*:

$$x^0 = ct. \quad (2)$$

Aquí c es una constante que permite uniformizar las dimensiones, que en principio no tienen por qué ser iguales. El valor de esta constante coincide con el de la velocidad de la luz en el vacío.

En coordenadas esféricas polares tenemos:

$$x^\mu = (ct, r, \theta, \phi),$$

donde

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta).$$

Luego, el intervalo en estas coordenadas resulta:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

El tensor métrico introduce una estructura causal en el espacio-tiempo

$ds^2 < 0$: región tipo espacio,

$ds^2 = 0$: región tipo luz,

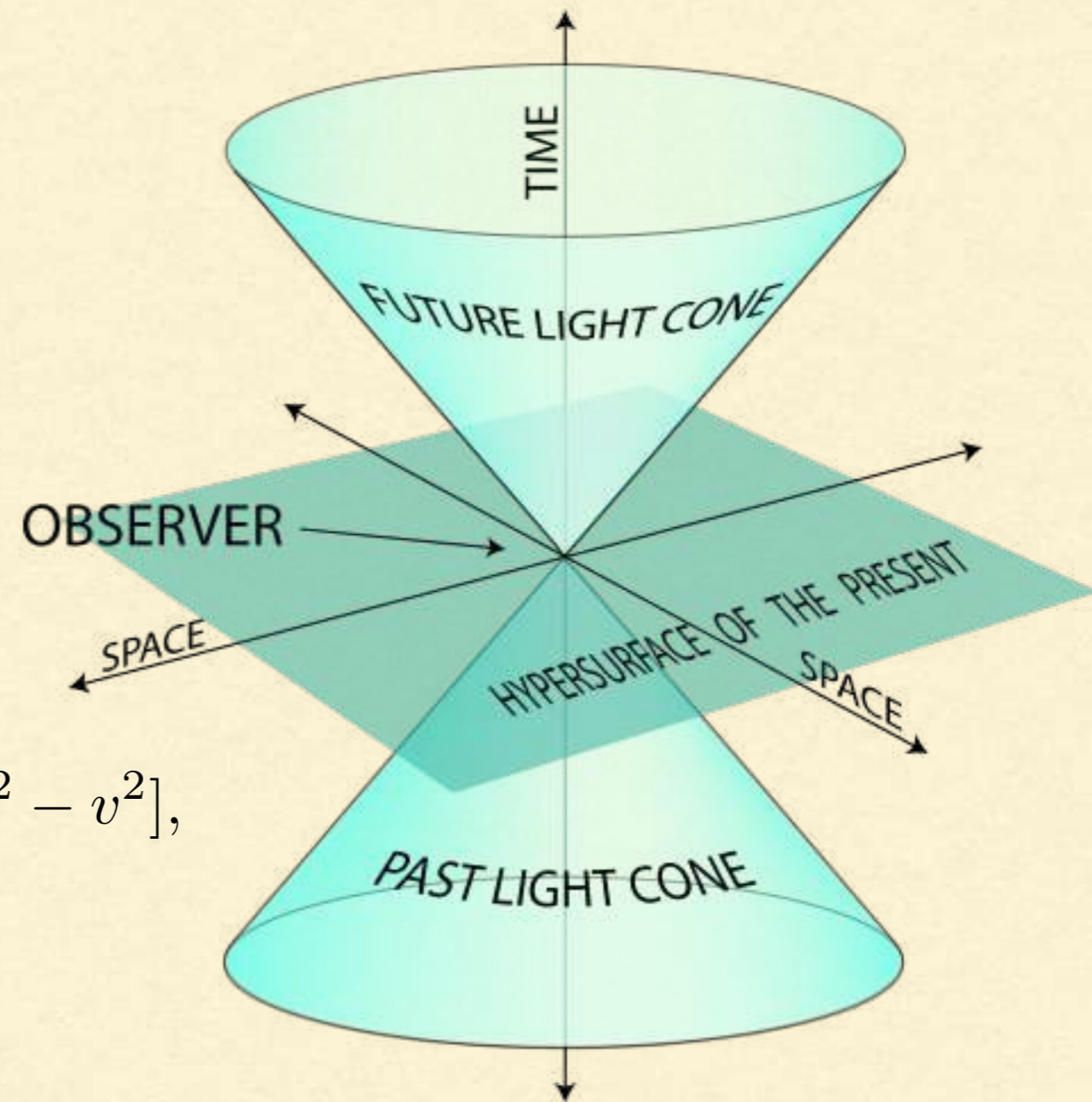
$ds^2 > 0$: región tipo tiempo.

$$ds^2 = dt^2 \left[c^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right] = dt^2 [c^2 - v^2],$$

$$ds^2 < 0 \iff v > c.$$

$$ds^2 = 0 \iff v = c.$$

$$ds^2 > 0 \iff v < c.$$

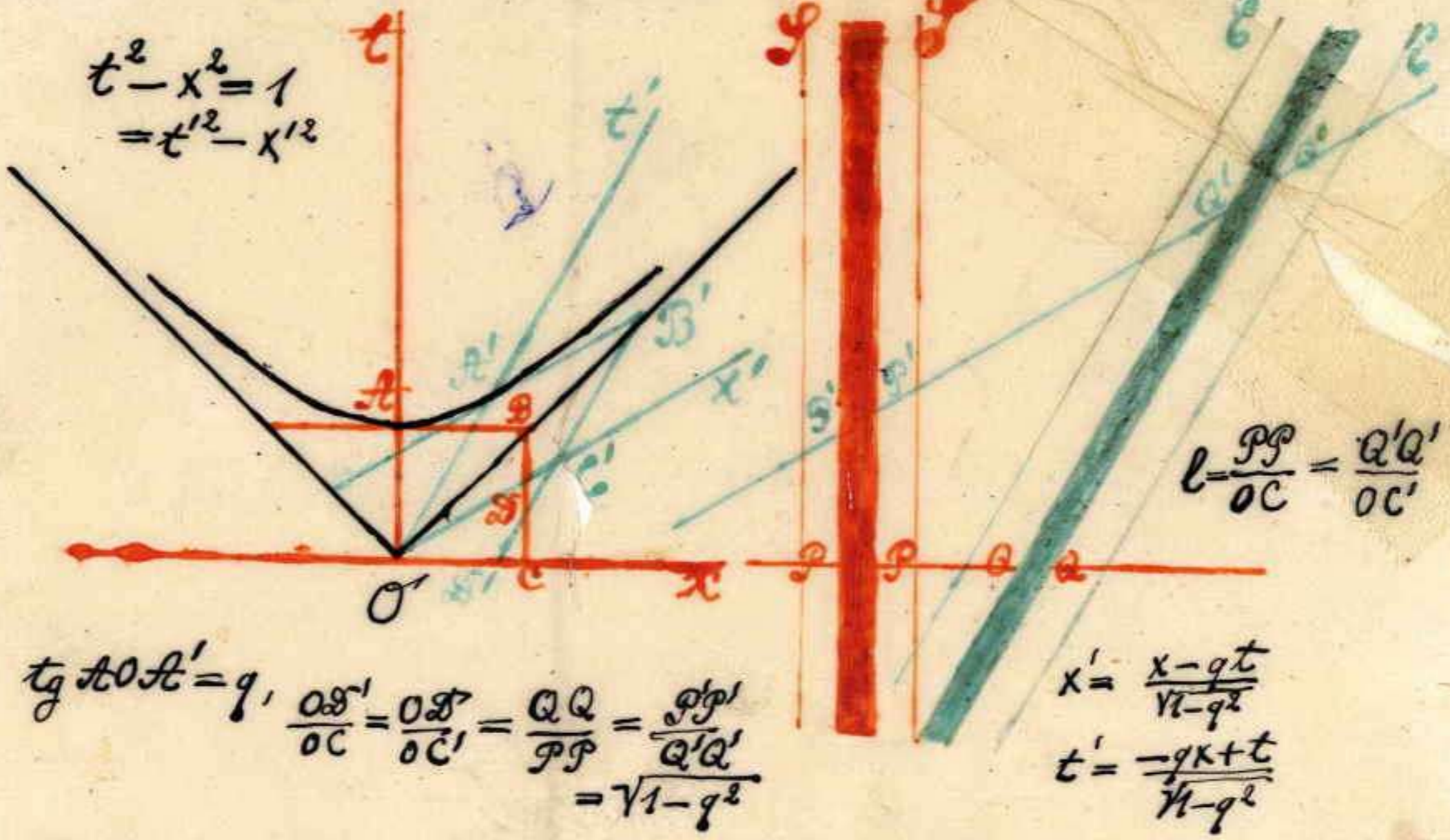




Kontraktion der Elektronen

$$t^2 - x^2 = 1$$

$$= t'^2 - x'^2$$



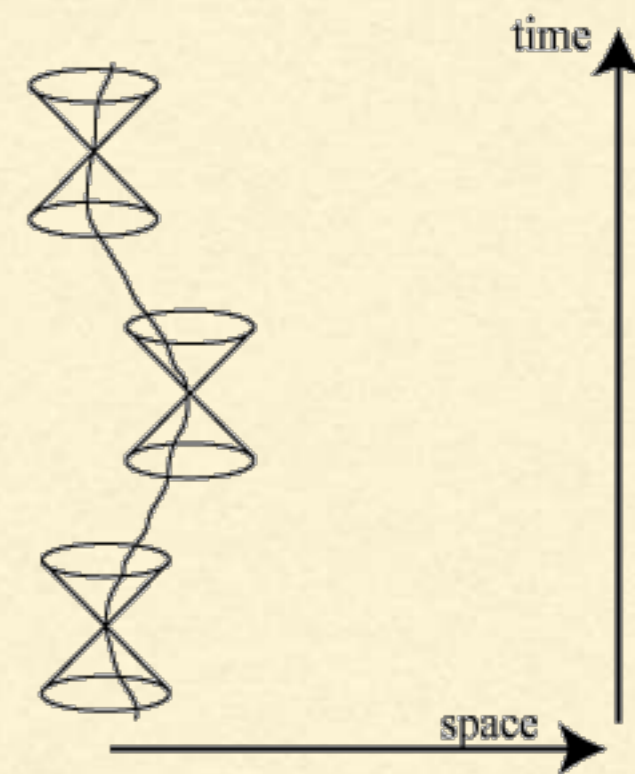
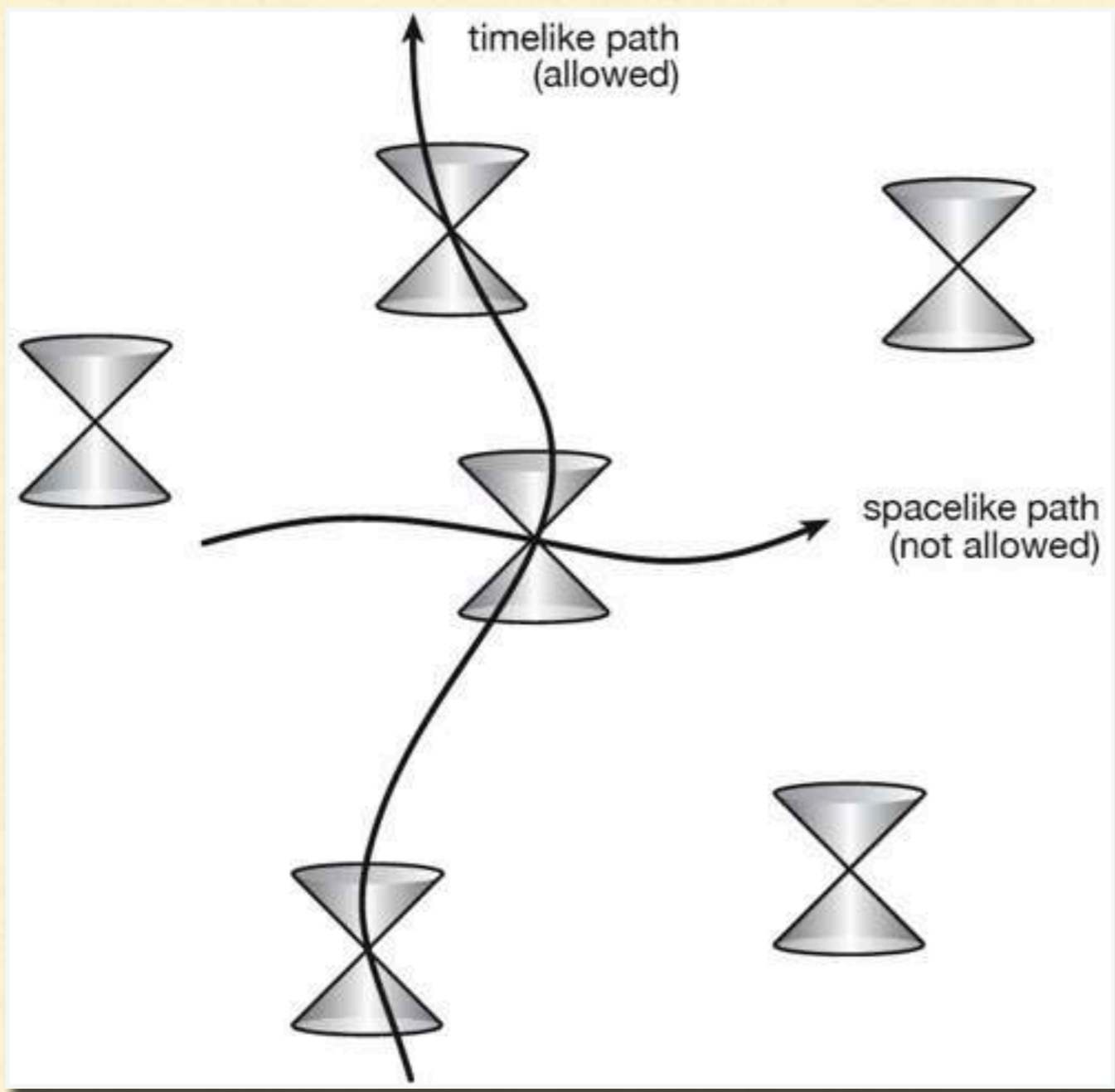
$$l = \frac{PP'}{OC} = \frac{O'Q'}{OC'}$$

$$\text{tg } \angle OAO' = v, \quad \frac{OQ'}{OC} = \frac{OQ'}{OC'} = \frac{OQ}{PP} = \frac{OQ'}{O'Q'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$t' = \frac{-vx + t}{\sqrt{1-v^2}}$$

Minkowski, Klön, 1908



Es posible definir el *tiempo propio* de un sistema físico que se mueve con velocidad v respecto de un cierto sistema coordenado como

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2.$$

Este es el tiempo que mide un reloj fijo al sistema físico.

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \frac{1}{c^2} (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \\ &= dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\} \\ &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \end{aligned}$$

y si introducimos el *factor de Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

donde

$$\beta = \frac{v}{c},$$

obtenemos:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}.$$

Debido a que $\gamma \geq 1$, el tiempo respecto al sistema propio se dilata. Para un sistema con $\beta = \beta(t)$:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)}.$$

El grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz es el grupo de transformaciones lineales homogéneas de de coordenadas que deja invariable al intervalo en la métrica de Minkowski.

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\},$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$



Definición de grupo

Sea L un conjunto no vacío y sea $*$ una función sobre L . El par ordenado $(L, *)$ es un grupo si y solo si $*$ es una ley interna en L , asociativa, con elemento neutro y tal que todo elemento de L admite inverso respecto de $*$.

En forma simbólica, $(L, *)$ es grupo si y solo si:

- $* : L^2 \longrightarrow L$,
- $(\forall a, b, c)_L \quad (a * b) * c = a * (b * c)$,
- $(\exists e)_L / (\forall a)_L \quad (a * e = e * a = a)$,
- $(\forall a)_L (\exists a^{-1})_L \quad (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$.

Si además se cumple que

- $(\forall a, b)_L \quad (a * b = b * a)$

se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano*.

Debido a que la invariancia del intervalo exige la invariancia del tensor métrico, se cumple que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\ &= \eta_{\mu\nu} L_{\alpha}^{\mu} dx^{\alpha} L_{\beta}^{\nu} dx^{\beta} \\ &= \eta_{\mu\nu} L_{\alpha}^{\mu} L_{\beta}^{\nu} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \end{aligned}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} L_{\alpha}^{\mu} L_{\beta}^{\nu}.$$

El elemento neutro del grupo de Lorentz es δ_{ν}^{μ} :

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu}.$$

El elemento inverso es la inversa de la matriz L_{ν}^{μ} . Esta siempre tiene inversa, ya que

$$\det (L_{\alpha}^{\mu} L_{\beta}^{\nu} \eta_{\mu\nu}) = \det (\eta_{\alpha\beta}) \implies (\det L_{\nu}^{\mu})^2 = 1 \implies \det L_{\nu}^{\mu} = \pm 1.$$

O sea que L_{ν}^{μ} es no singular y por lo tanto invertible. Se puede demostrar, derivando $L_{\alpha}^{\mu} L_{\beta}^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$ respecto de x^{ϵ} , que las transformaciones son *únicas*.

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} L_{\alpha}^{\mu} L_{\beta}^{\nu},$$

con lo cual resulta que la componente

$$\begin{aligned}\eta_{00} &= 1 = \eta_{\mu\nu} L_0^{\mu} L_0^{\nu} \\ &= \eta_{00}(L_0^0)^2 + \eta_{11}(L_0^1)^2 + \eta_{22}(L_0^2)^2 + \eta_{33}(L_0^3)^2 \\ &= (L_0^0)^2 - (L_0^1)^2 - (L_0^2)^2 - (L_0^3)^2.\end{aligned}$$

$$(L_0^0)^2 - [(L_0^1)^2 + (L_0^2)^2 + (L_0^3)^2] = 1$$

$$(L_0^0)^2 = 1 + [(L_0^1)^2 + (L_0^2)^2 + (L_0^3)^2] \geq 1 \implies L_0^0 \geq 1 \vee L_0^0 \leq -1.$$

Esto significa que existe un conjunto de transformaciones de Lorentz prohibidas.

Hay 4 casos posibles:

1. $\det(L) = 1 \wedge L_0^0 \geq 1 \longrightarrow$ grupo propio de Lorentz,
2. $\det(L) = 1 \wedge L_0^0 \leq -1 \longrightarrow$ inversiones espacio-temporales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

3. $\det(L) = -1 \wedge L_0^0 \geq 1 \longrightarrow$ inversiones espaciales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

4. $\det(L) = -1 \wedge L_0^0 \leq -1 \longrightarrow$ inversiones temporales

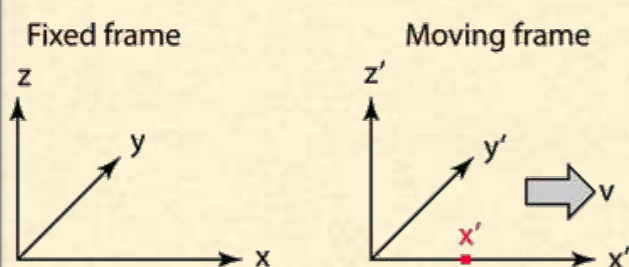
$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los casos 2, 3 y 4 no son grupos porque no contienen la identidad.

El grupo de Lorentz es un subgrupo propio del más general *grupo de Poincaré*. Este consiste en las transformaciones lineales *inhomogéneas* que dejan la métrica $\eta_{\mu\nu}$ invariante. Se trata de transformaciones de Lorentz más una traslación arbitraria en el espacio-tiempo:

$$P = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + t^\mu\}.$$

Consideremos, como ejemplo, el caso simple de una transformación con $t^\mu = 0$ que consista en un cambio entre sistemas que se mueven sobre el eje x con velocidad v (usualmente llamado *boost*):



$$\mathbf{L}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

$$t' = \gamma (t - vx/c^2)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z.$$

Transformaciones de Lorentz entre sistemas de referencia que se mueven en la dirección x con velocidad v.

If the length $L_0 = x'_2 - x'_1$ is measured in the moving reference frame, then $L = x_2 - x_1$ can be calculated using the Lorentz transformation.

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

But since the two measurements made in the fixed frame are made simultaneously in that frame, $t_2 = t_1$, and

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}$$

Length contraction

Dinámica relativista

Trayectoria de una partícula moviéndose en el espacio-tiempo:

$$x^\mu = x^\mu(\tau),$$

siendo τ el tiempo propio.

Acción:

$$S = \int_1^2 \mathcal{L} dt$$

donde $\mathcal{L} = T - U$ es el Lagrangiano de la partícula, siendo T y U la energía cinética y potencial, respectivamente, y los límites 1 y 2 representan los puntos inicial y final de la trayectoria. Sobre trayectorias reales $\delta S = 0$.

Como la partícula se mueve libremente, lo hace sobre una geodésica y su acción es:

$$S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds$$

donde α es constante y $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 / \gamma^2$.

$$S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} c \sqrt{1 - \beta^2} dt = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{c^2 - v^2} dt.$$

El Lagrangiano es $\mathcal{L} = -\alpha \sqrt{c^2 - v^2}$. Para $v \rightarrow 0$,

$$\mathcal{L} \approx -\alpha c + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2 + \dots$$

Comparando con la expresión newtoniana, $\mathcal{L} = (1/2)mv^2$, obtenemos que $\alpha = mc$ y por lo tanto

$$\mathcal{L} = -mc \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Definimos el cuadrivector velocidad como:

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt/\gamma} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \dot{x}^\mu,$$

y la quadri-aceleración como:

$$a^\mu \equiv \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \ddot{x}^\mu.$$

El quadri-impulso es:

$$p_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu},$$

$$\vec{P} = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} \vec{v} = \gamma m \vec{v}$$
$$p_0 = \gamma mc.$$

Usando el Hamiltoniano \mathcal{H} definimos la energía como

$$E = \mathcal{H} = \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \gamma m c^2.$$

$$P^\mu \equiv (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P} \right)$$

$$P^\mu = \eta^{\mu\nu} P_\nu = m v^\mu.$$

$$P^\mu P_\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} m \frac{dx_\mu}{d\tau} = m^2 \frac{dx^\mu dx_\mu}{d\tau^2} = m^2 \frac{ds^2}{d\tau^2} = (mc)^2$$

donde hemos usado que $\eta_{\mu\nu} dx^\nu = dx_\mu$. Luego, $E^2/c^2 - p^2 = m^2 c^2$ y

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2,$$

que es la expresión para la energía de una partícula libre y tiene un término de energía en reposo y otro dinámico.

Ecuaciones del movimiento

$$S = -m c^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -m c^2 \int_a^b d\tau$$

$$\delta S = -m c^2 \int_a^b \delta d\tau.$$

Utilizando que

$$\delta(ds^2) = \delta(c^2 d\tau^2)$$

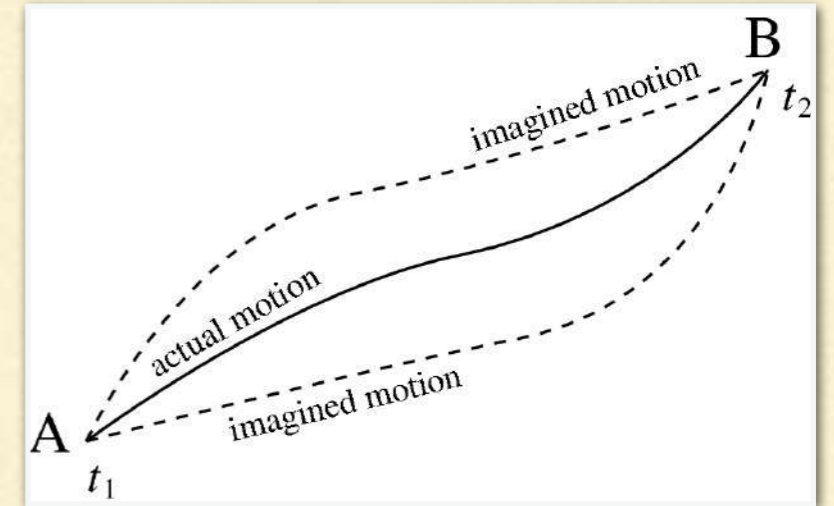
$$2\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha \delta dx^\beta = c^2 2d\tau \delta d\tau$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \delta d\tau &= \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \delta dx^\beta = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} v^\alpha d\delta x^\beta \\ &= \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} d(v^\alpha \delta x^\beta) - \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \delta x^\beta dv^\alpha \\ &= \frac{1}{c^2} d(v^\alpha \delta x_\alpha) - \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \delta x^\beta \frac{dv^\alpha}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\delta S = -m v^\alpha \delta x_\alpha \Big|_a^b + m \int_a^b \delta x_\alpha \frac{dv^\alpha}{d\tau} d\tau.$$



En los límites $(\delta x^\alpha)_a = (\delta x^\mu)_b = 0$ la trayectoria real satisface $\delta S = 0$, entonces:

$$0 = m \delta x_\alpha \frac{dv^\alpha}{d\tau} d\tau.$$

Como la variación δx es arbitraria:

$$\frac{dv^\alpha}{d\tau} = 0.$$

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = 0.$$

En caso de que haya una fuerza externa f^μ :

$$f^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}.$$

Cuando no hay fuerza, $P^\mu = l^\mu$ con l^μ un cuadrivector constante. Esto expresa la conservación del momento lineal.

Resultados importantes

$$E = \gamma m c^2.$$

Cuando $\beta \longrightarrow 0$, $E \longrightarrow m c^2$.

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m \vec{v} \right)$$

$$f^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right).$$

Elementos de relatividad general

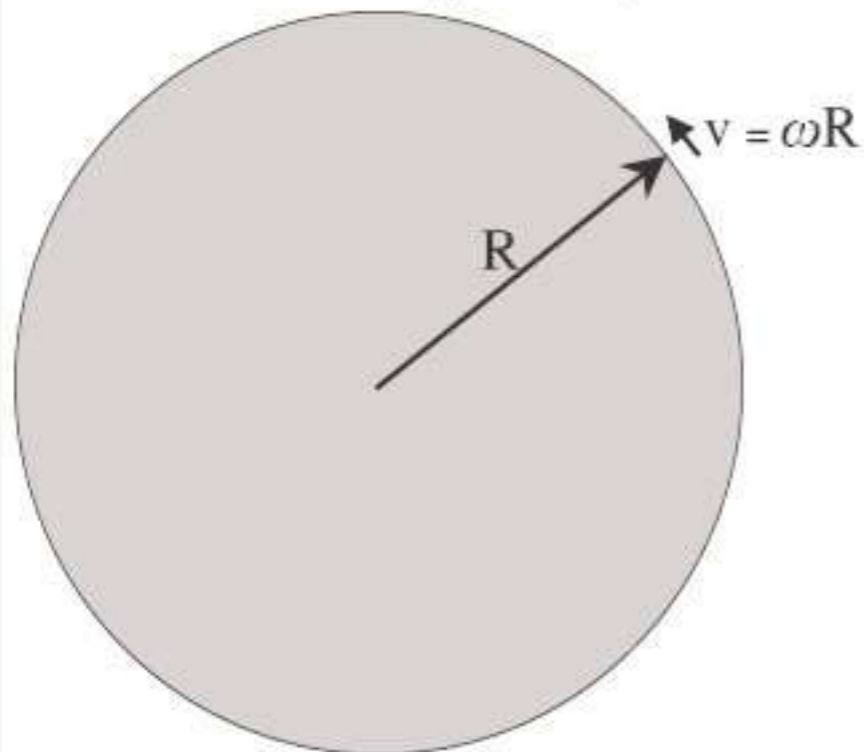
¿Es posible generalizar la relatividad para que las ecuaciones de la física sean válidas en cualquier sistema de referencia? (Einstein 1907)

Principio de covariancia general:

Las leyes de la física deben ser representadas por ecuaciones que no dependan en su forma del sistema de coordenadas utilizado.

En otras palabras: las ecuaciones que representan las leyes físicas deben ser invariantes de forma bajo transformaciones generales de coordenadas.

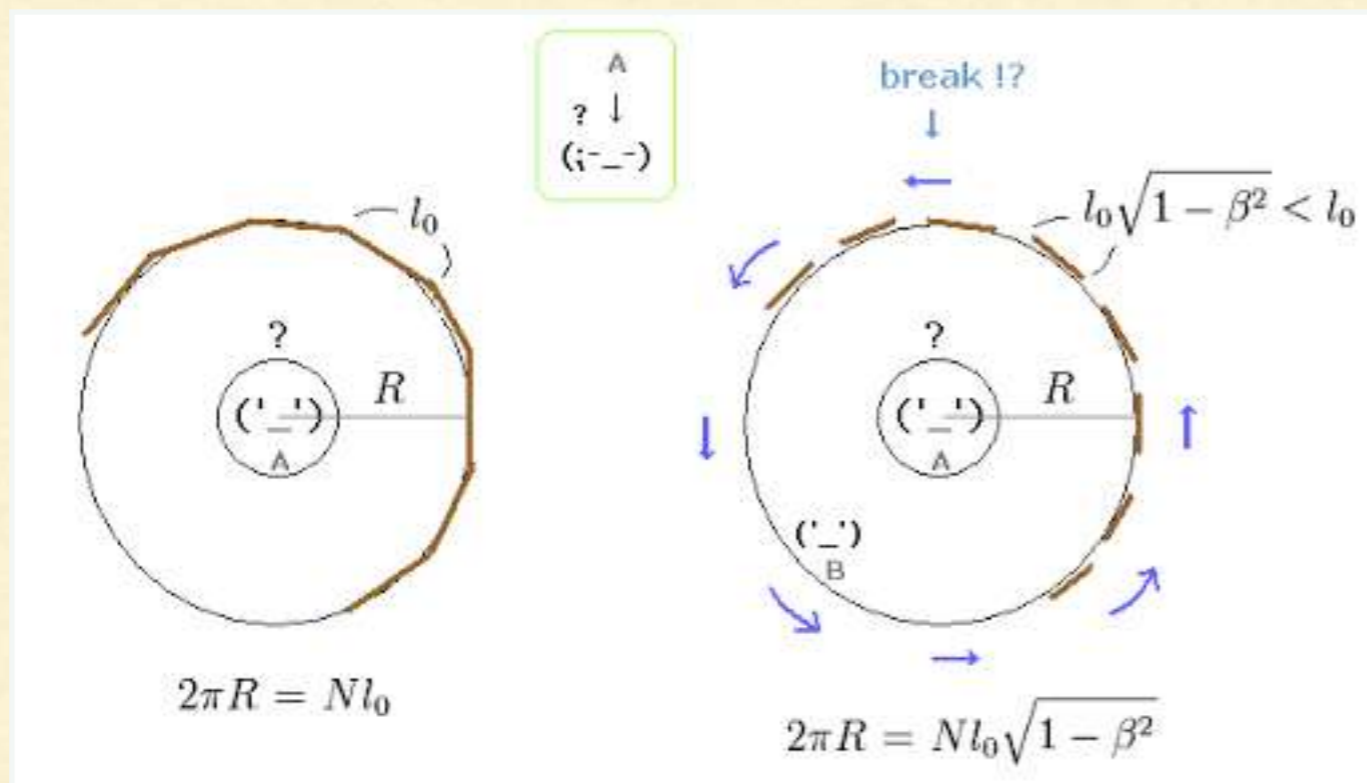
$$\text{Perim} = 2\pi R \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Disco de Ehrenfest



$$\frac{\text{circumference}}{\text{diameter}} = \frac{2\pi R \sqrt{1 - (\omega R)^2/c^2}}{2R} = \pi \sqrt{1 - (\omega R)^2/c^2}.$$



La circunferencia de un disco giratorio debe contraerse, pero no el radio, ya que el radio es perpendicular a la dirección del movimiento.

La geometría no puede ser euclídea

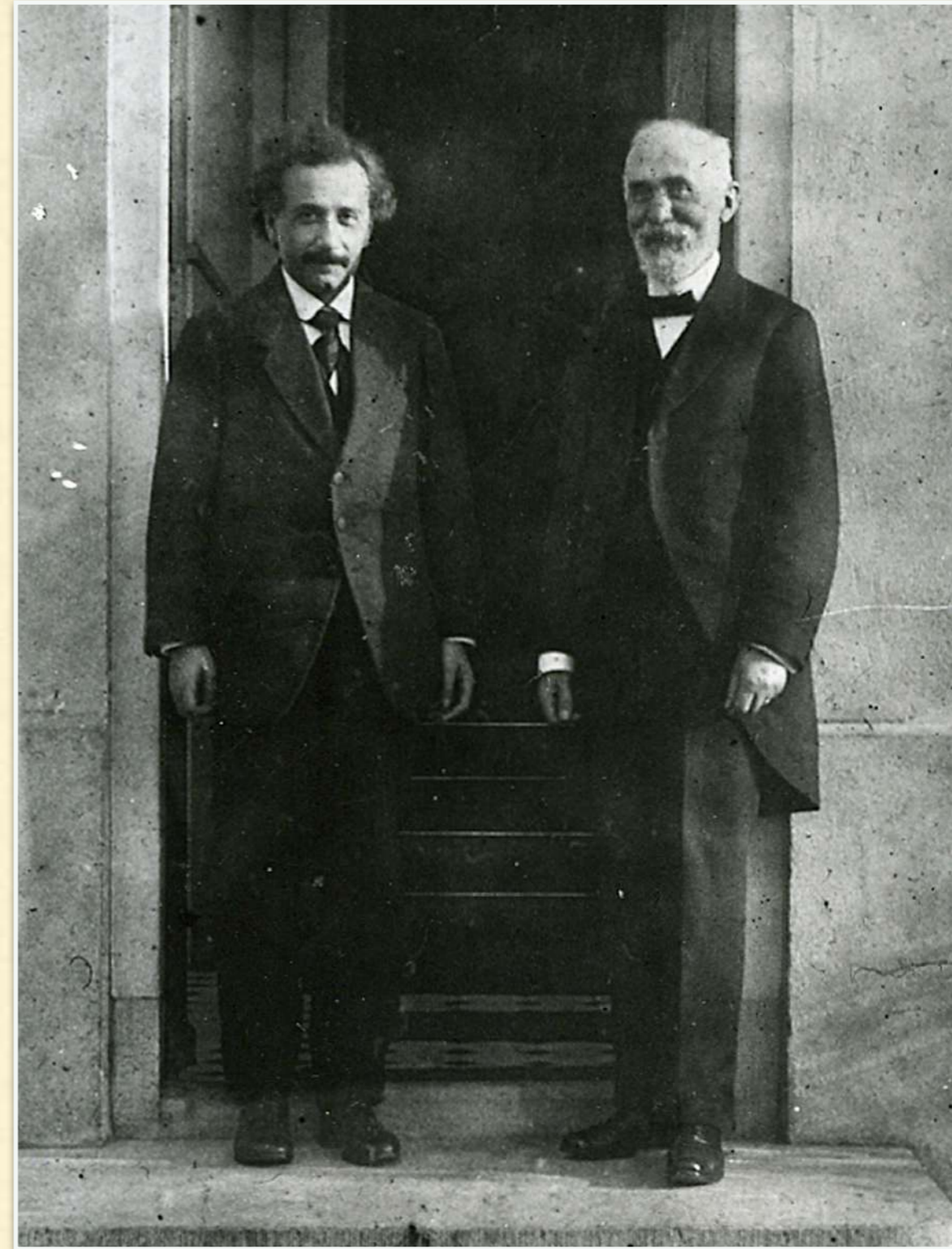
El modelo de Lorentz de la teoría del campo

La ecuación de campo: fuente determina campo

- Operador diferencial (CAMPO) = FUENTE
- Representación del CAMPO = tensor métrico
- Representación de la FUENTE = tensor de energía-momento

Problema:

¿Cuál es el OPERADOR DIFERENCIAL ?



Nikolay Nikolayevich Ryzkov

1 1073

Mikhailovskaya Troika.

Tray Eger Nürnberg

2.13 1.13 3.31.

Böhmische Staatsrealschule

Kleinseite.

1912:

Towards the
metric tensor

gravitation

$$\xi = x + \frac{a}{2}ct^2 \quad \text{relativly.}$$

$$\tau = ct \quad c = c_0 + ax$$

$$\Delta c = 4\pi h c \rho \quad | \text{unhaltbar}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{c^2} \right) = - \frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial x}$$

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \right\} = - \frac{m \frac{\partial a}{\partial x}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} + R_x$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathcal{H}$$

$$0 = \operatorname{div} \mathcal{H}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} = \operatorname{div} \mathcal{F}$$

$$\frac{c}{2} (\mathcal{F}^2 + \mathcal{H}^2) = \text{Energy}$$

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
α_{11}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	β_{11}			
α_{12}				β_{12}			
α_{13}				β_{13}			
α_{14}				β_{14}			

$$\sum \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum \sum g'_{\rho\sigma} dx'_\rho dx'_\sigma$$

$$= \sum \sum \sum \sum g'_{\rho\sigma} \alpha_{\rho\eta} \alpha_{\sigma\xi} dx_\eta dx_\xi$$

$$g_{\mu\nu} = \sum \sum g'_{\rho\sigma} \alpha_{\rho\mu} \alpha_{\sigma\nu}$$

$$x'_\rho = \sum \alpha_{\rho\sigma} x_\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} = \sum \alpha_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x'_\sigma}$$

analogy

$$g'_{\rho\sigma} = \sum \sum g_{\mu\nu} \beta_{\rho\mu} \beta_{\sigma\nu}$$

Spezialfall für die $g_{\mu\nu}$

g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	c^2

$$c^2 = \frac{c \Delta c}{\Delta x} - \frac{1}{2} \text{grad}^2 c$$

$$2c \frac{\partial c}{\partial x} = 2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + 2c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\Delta(c^2) = 2 \text{grad}^2 c + 2c \Delta c$$

$$\text{grad}(c^2) = 2c \text{grad} c$$

$$\frac{c^2}{2} = \gamma$$

$$\Delta \gamma = \text{grad}^2 c + c \Delta c$$

$$\text{grad} \gamma = c \text{grad} c$$

$$\frac{\text{grad}^2 \gamma}{2\gamma} = \text{grad}^2 c$$

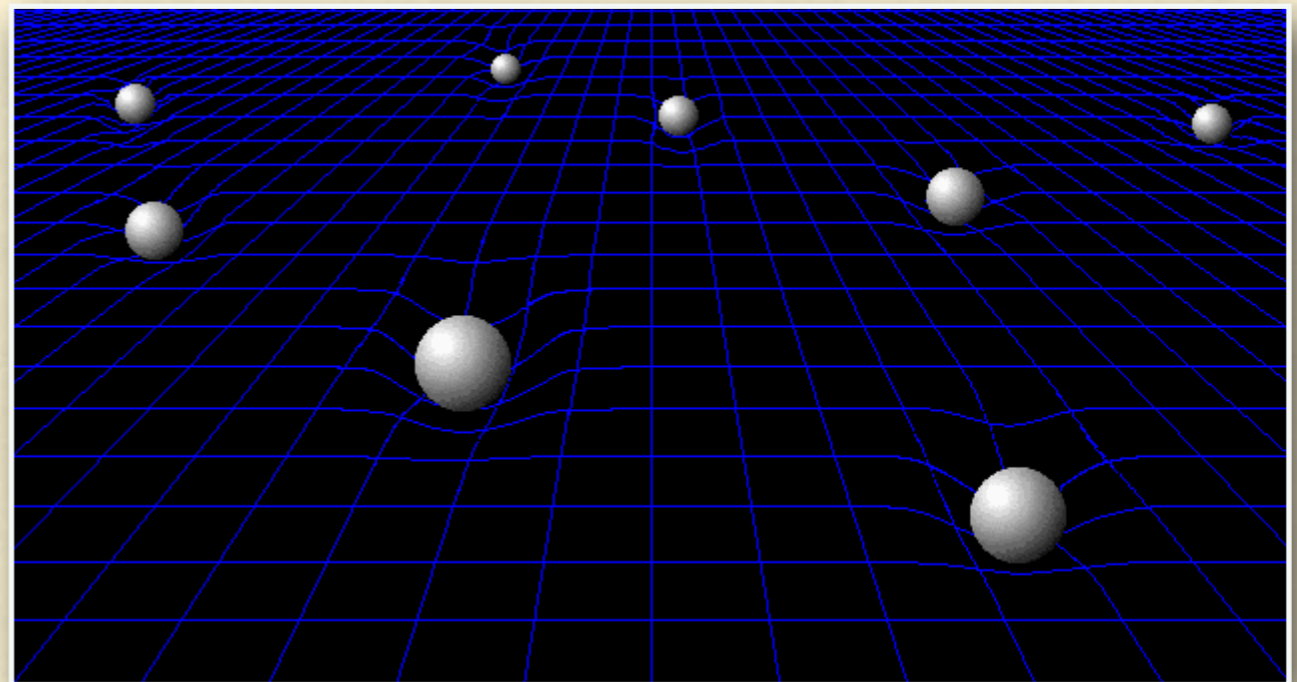
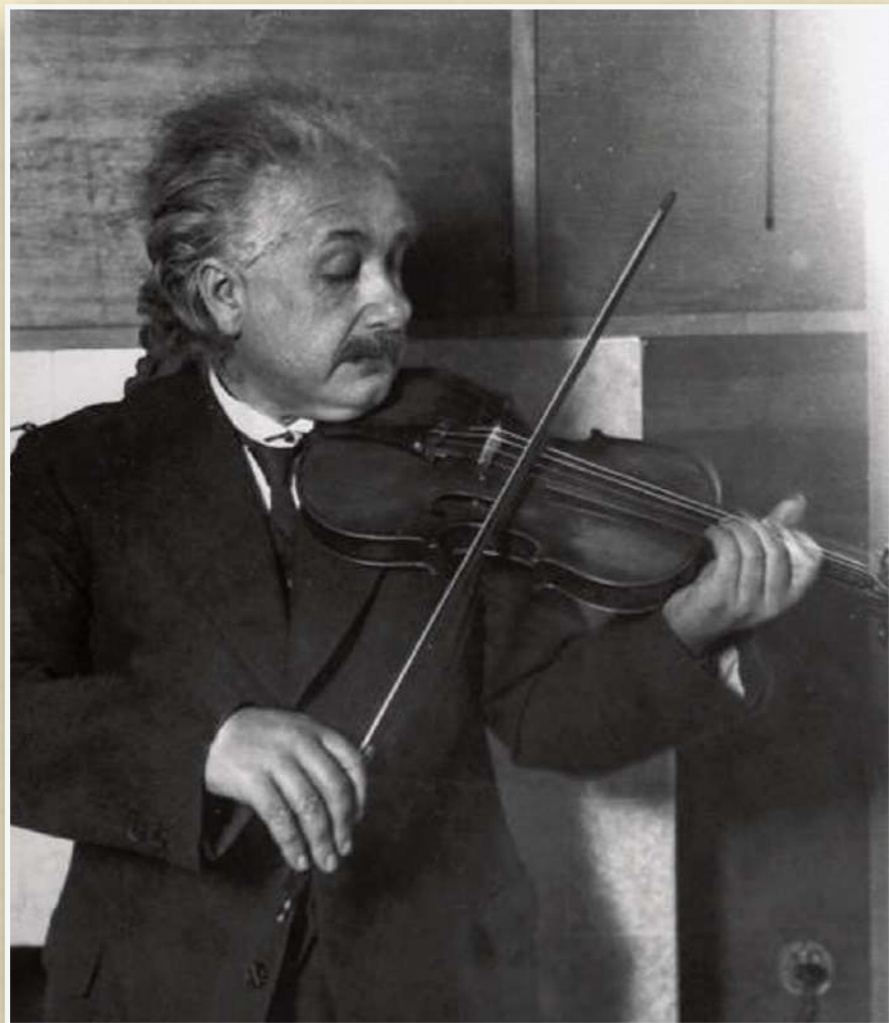
$$\Delta \gamma = \frac{3}{4} \frac{\text{grad}^2 \gamma}{\gamma}$$

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

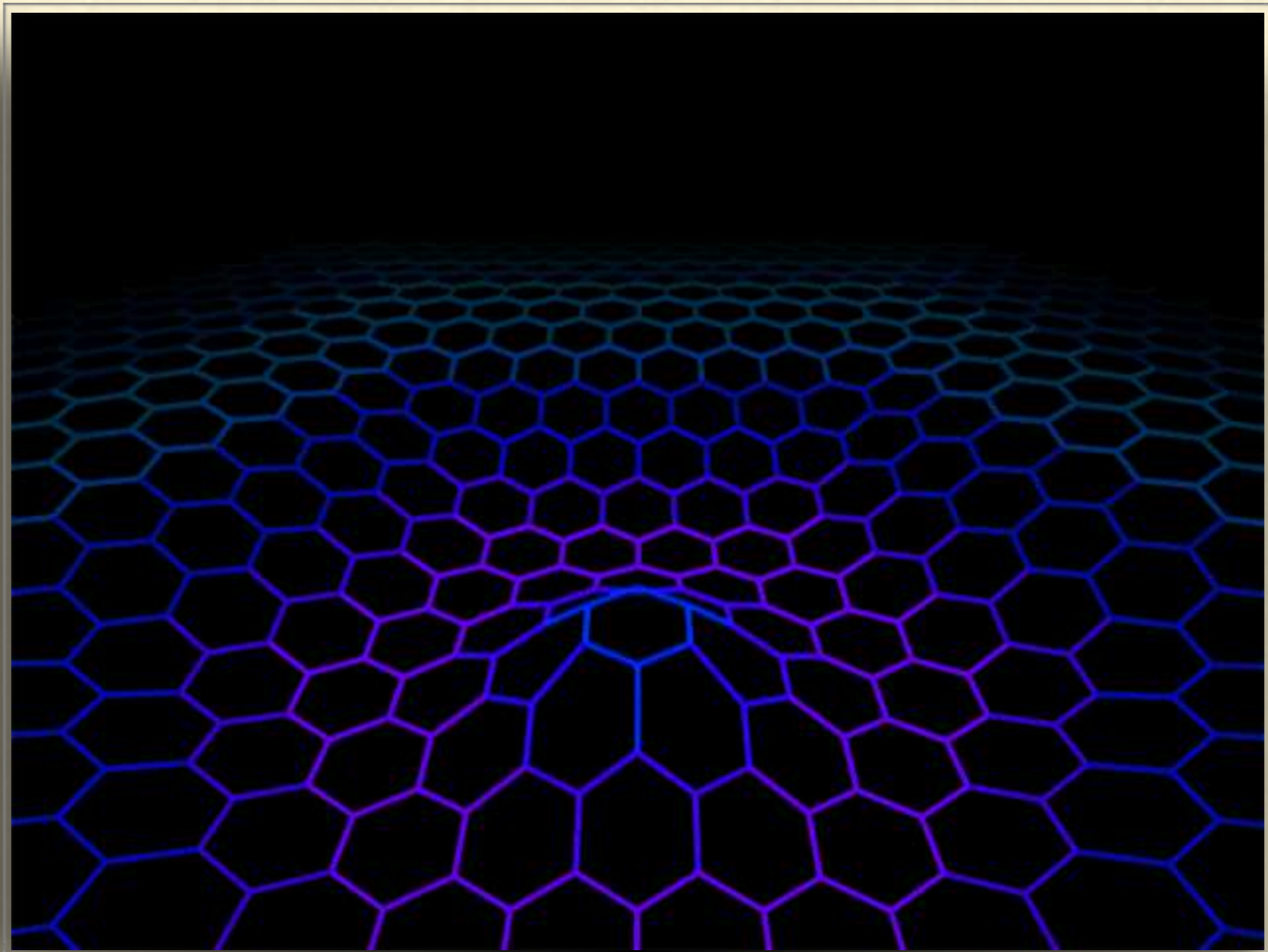
$$F(g_{ab}) = k T_{ab}$$

Albert Einstein,
Zurich Notebook (1912/13),
p. 39L

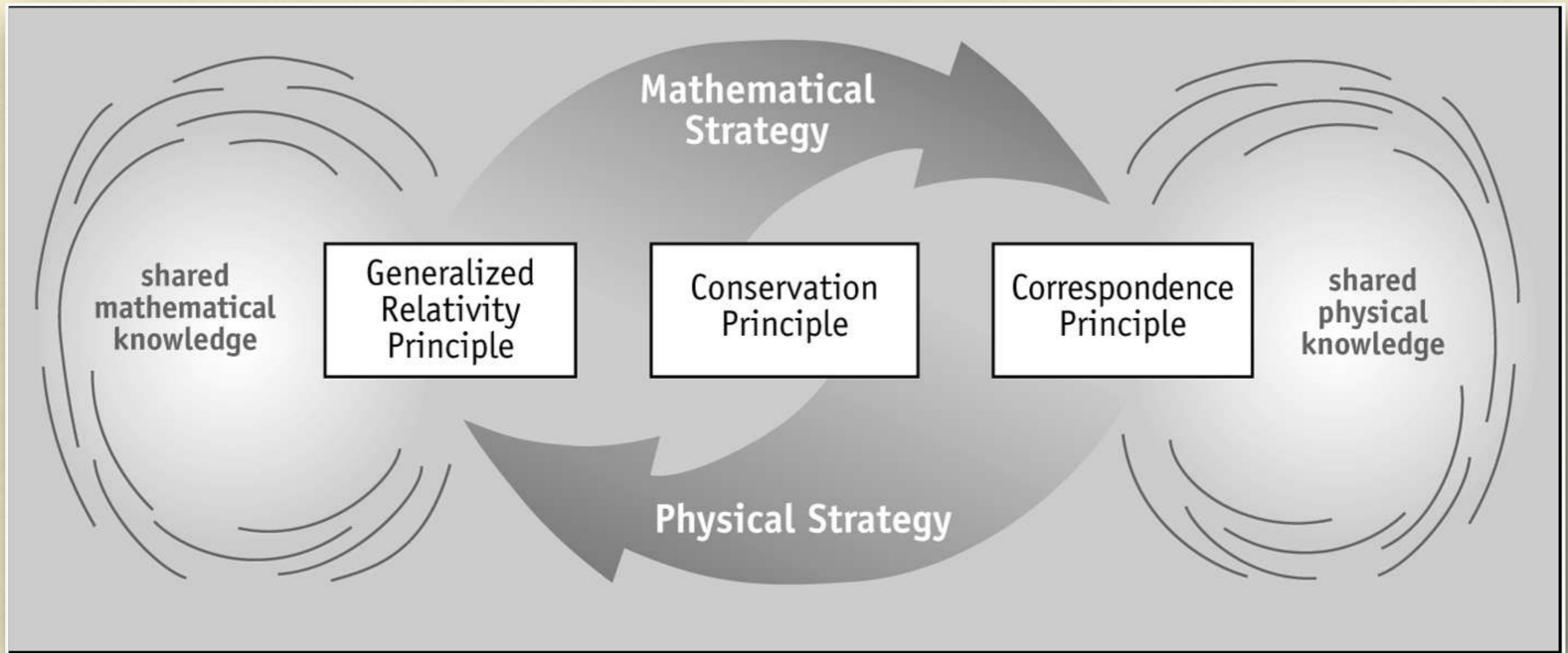
Einstein quiere representar la gravitación por los 10 coeficientes independientes del tensor métrico del espacio-tiempo. Estos deberían ser determinados por la materia del universo, de acuerdo a las ideas de Mach...

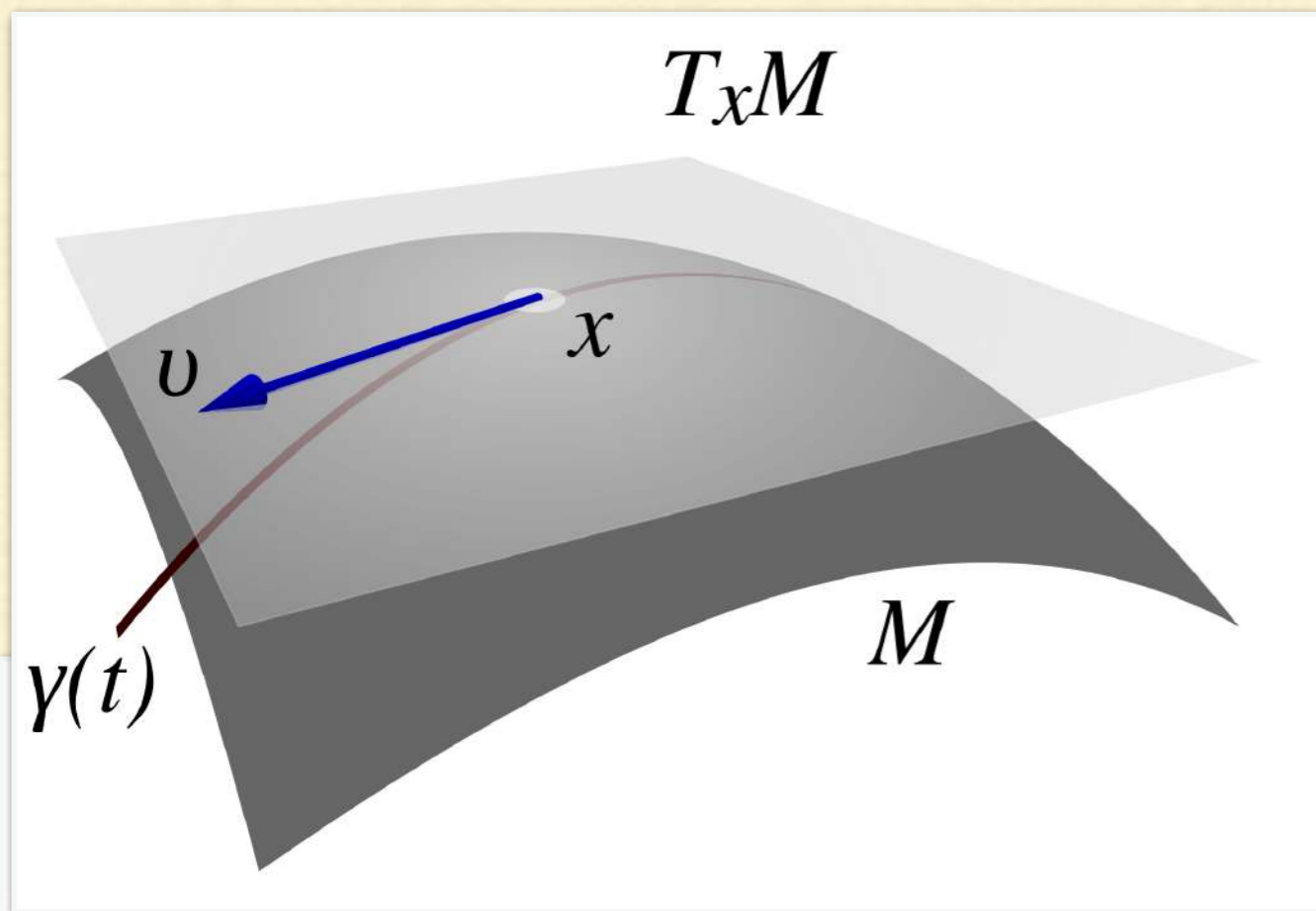


Einstein quiere representar la gravitación por los 10 coeficientes independientes del tensor métrico del espacio-tiempo. Estos deberían ser determinados por la materia del universo, de acuerdo a las ideas de Mach...



La doble estrategia de Einstein:
la matemática parte de la física y es controlada por ella.

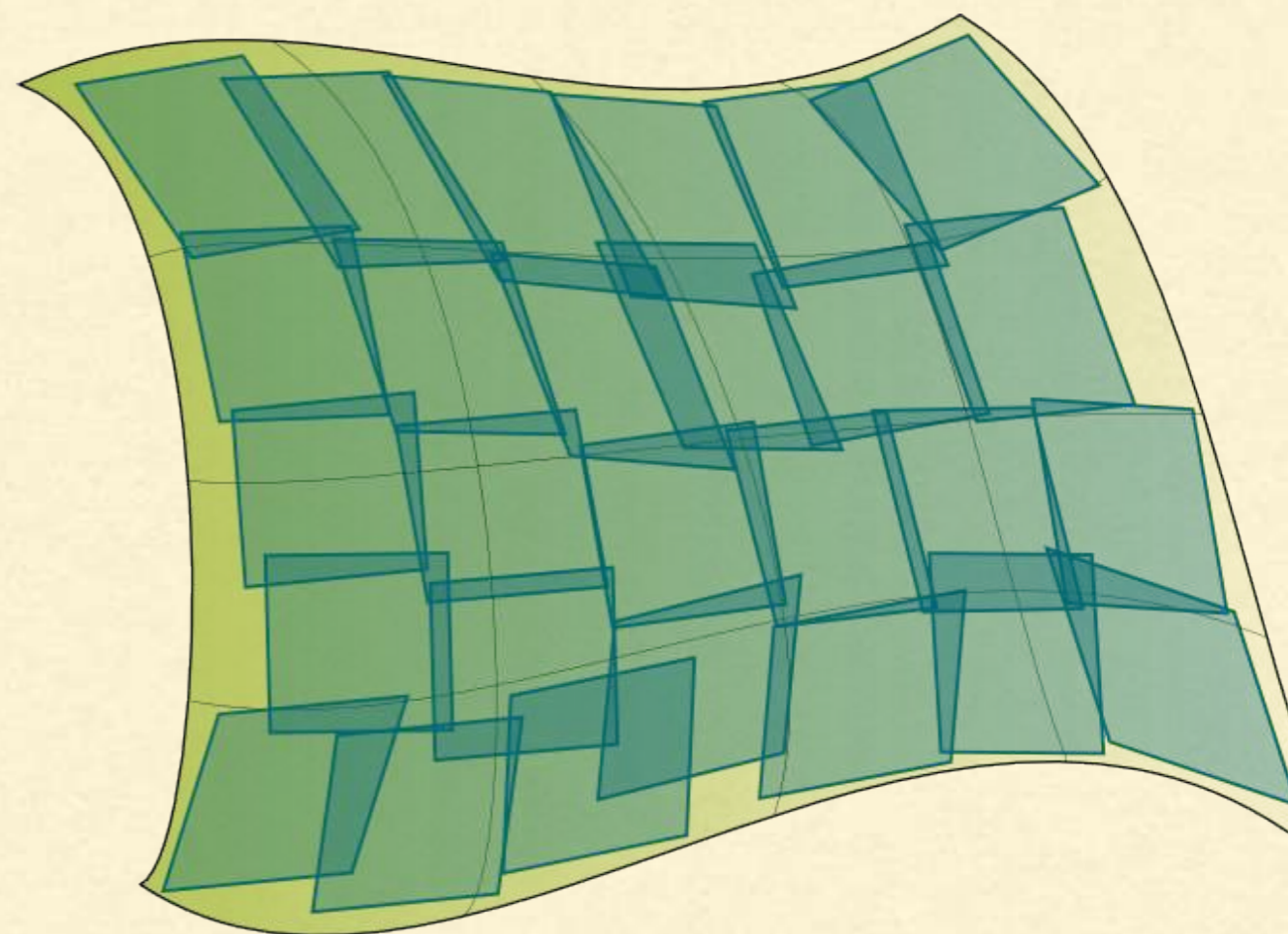




$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right)$$

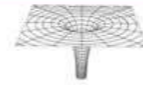
$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{jkl}$$

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml}$$



El espacio-tiempo es pseudo-Riemanniano

Contractions



Contracting the Riemann tensor gives firstly the **Ricci tensor**

$$R^\gamma_{\alpha\gamma\beta} = R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\delta_{\gamma\delta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\delta} \Gamma^\delta_{\beta\gamma}$$

Contracting again gives the **Ricci scalar**

$$g^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta} = R^\gamma_\gamma = R$$

We also have the **Kretschmann scalar**, which is the measure of the underlying curvature

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = K$$

If this is not zero, the spacetime is not flat! For the Schwarzschild metric, we have

$$K = \frac{48m^2}{r^6}$$

Geodésicas

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Geodesic Equation of Motion

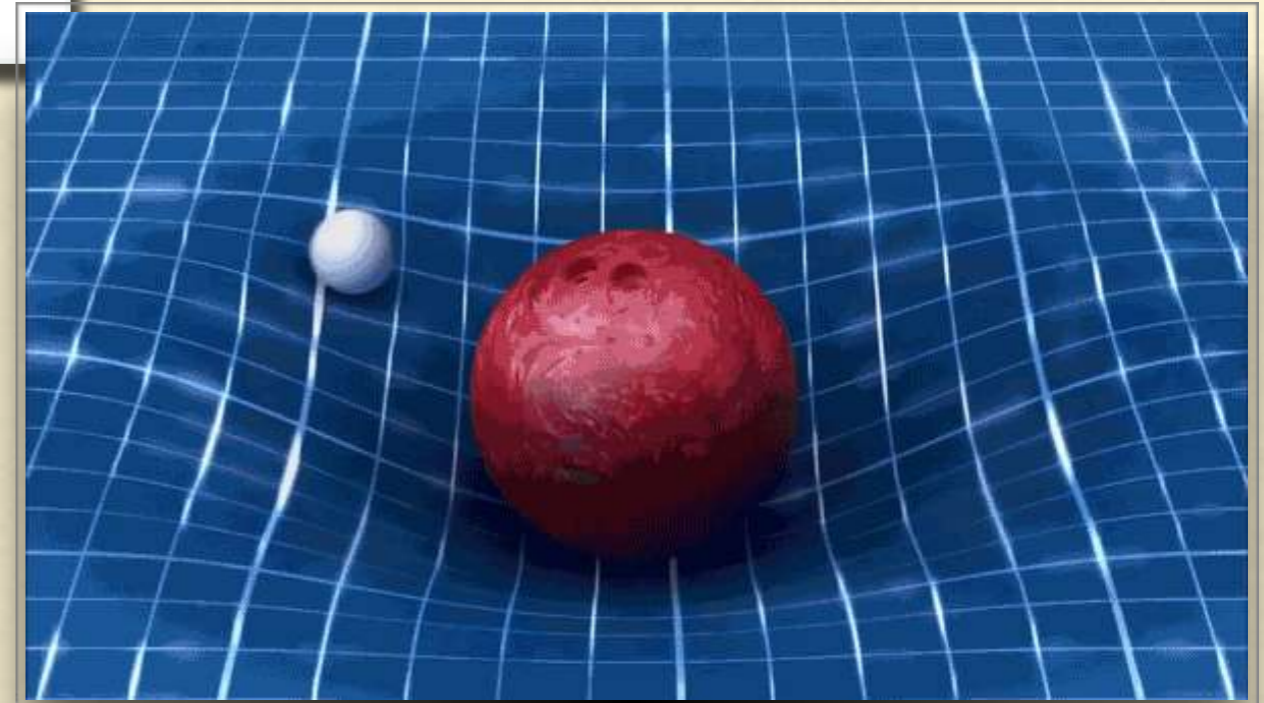
Curvature of trajectory

Generalized gradient

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0$$

Christoffel symbol

Path length element



Die Feldgleichungen der Gravitation.

VON A. EINSTEIN.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen¹ habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariablen gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der „Materie“ verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $|g|$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

Aus der bekannten RIEMANSCHEN Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{ik} = R_{ik} + S_{ik} \quad (1)$$

$$R_{ik} = -\sum_l \frac{\partial^2 \{im\}}{\partial x_l^2} + \sum_l \{il\} \{mz\} \quad (1a)$$

$$S_{ik} = \sum_l \frac{\partial \{il\}}{\partial x_k} - \sum_l \{im\} \{zl\} \quad (1b)$$

¹ Sitzungsber. XLIV, S. 778 und XLV, S. 799, 1915.

25 de noviembre de 1915

Título:

“Las Ecuaciones de Campo de la Gravitación”

Curvature of space

Distribution of mass/energy

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

Some constants

Ecuaciones de Einstein-Maxwell:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{\text{mat}} + T_{\mu\nu}^{\text{EM}}),$$

donde Λ es la constante cosmológica, $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ son el tensor y el escalar de Ricci, respectivamente, y $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ es el tensor de Riemann (o de curvatura). Este tensor de curvatura se anula si el espacio-tiempo es plano.

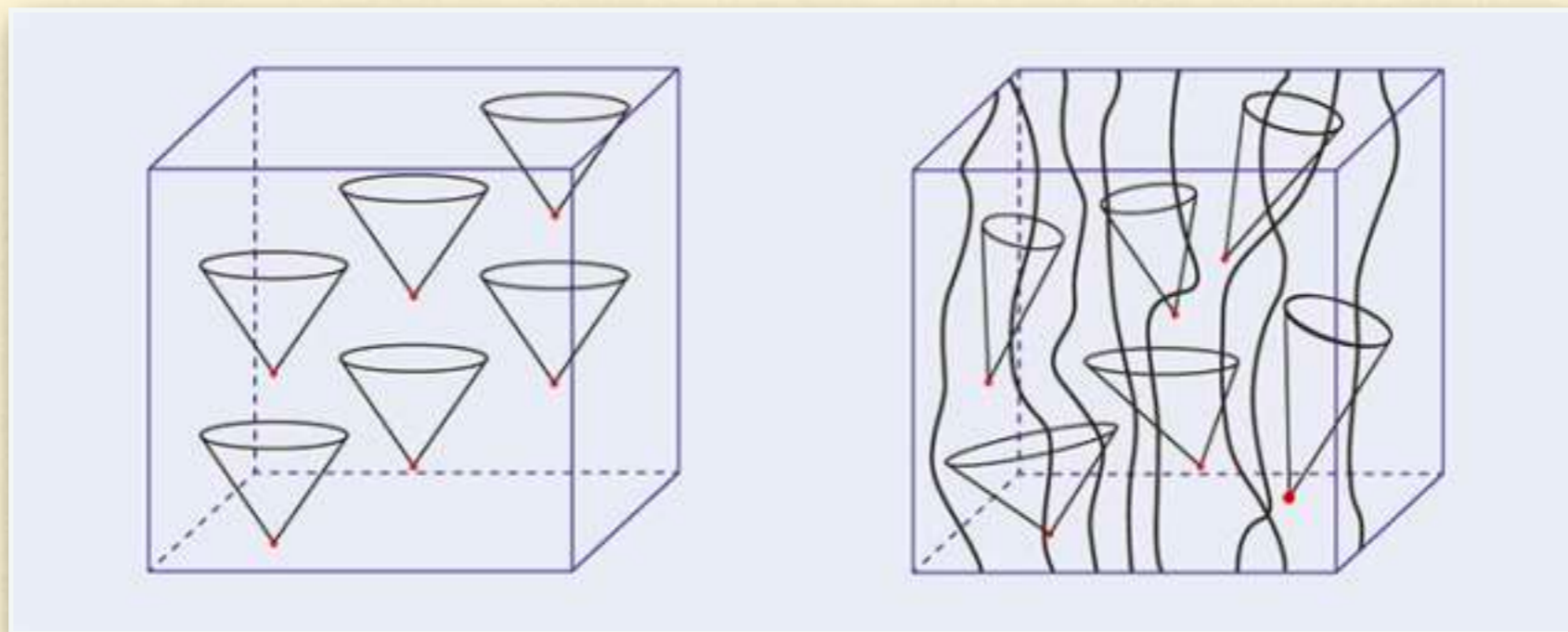
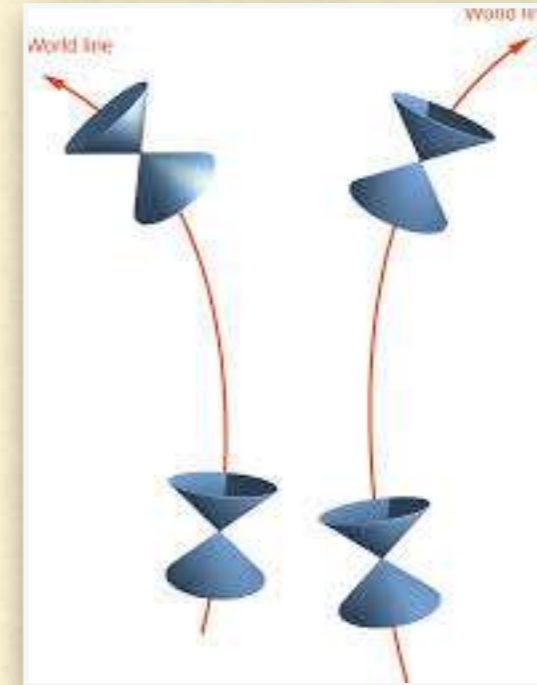
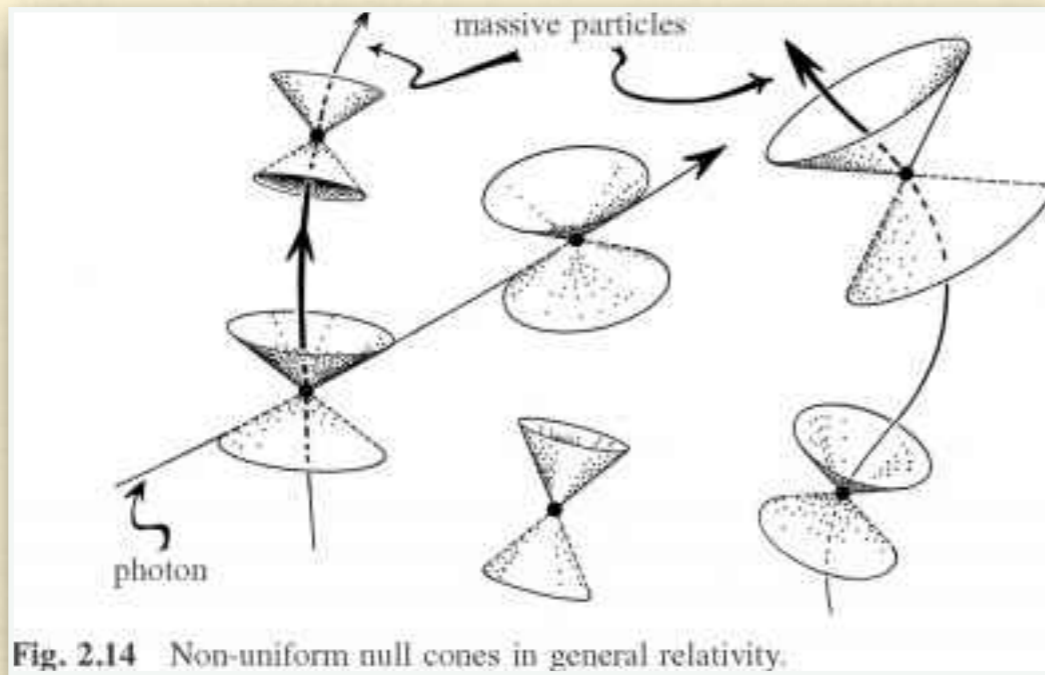
$$T_{\mu\nu}^{\text{mat}} = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu},$$

donde ρ , p y u_{μ} son la densidad, la presión y la cuadri-velocidad, respectivamente.

$$T_{\mu\nu}^{\text{EM}} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right).$$

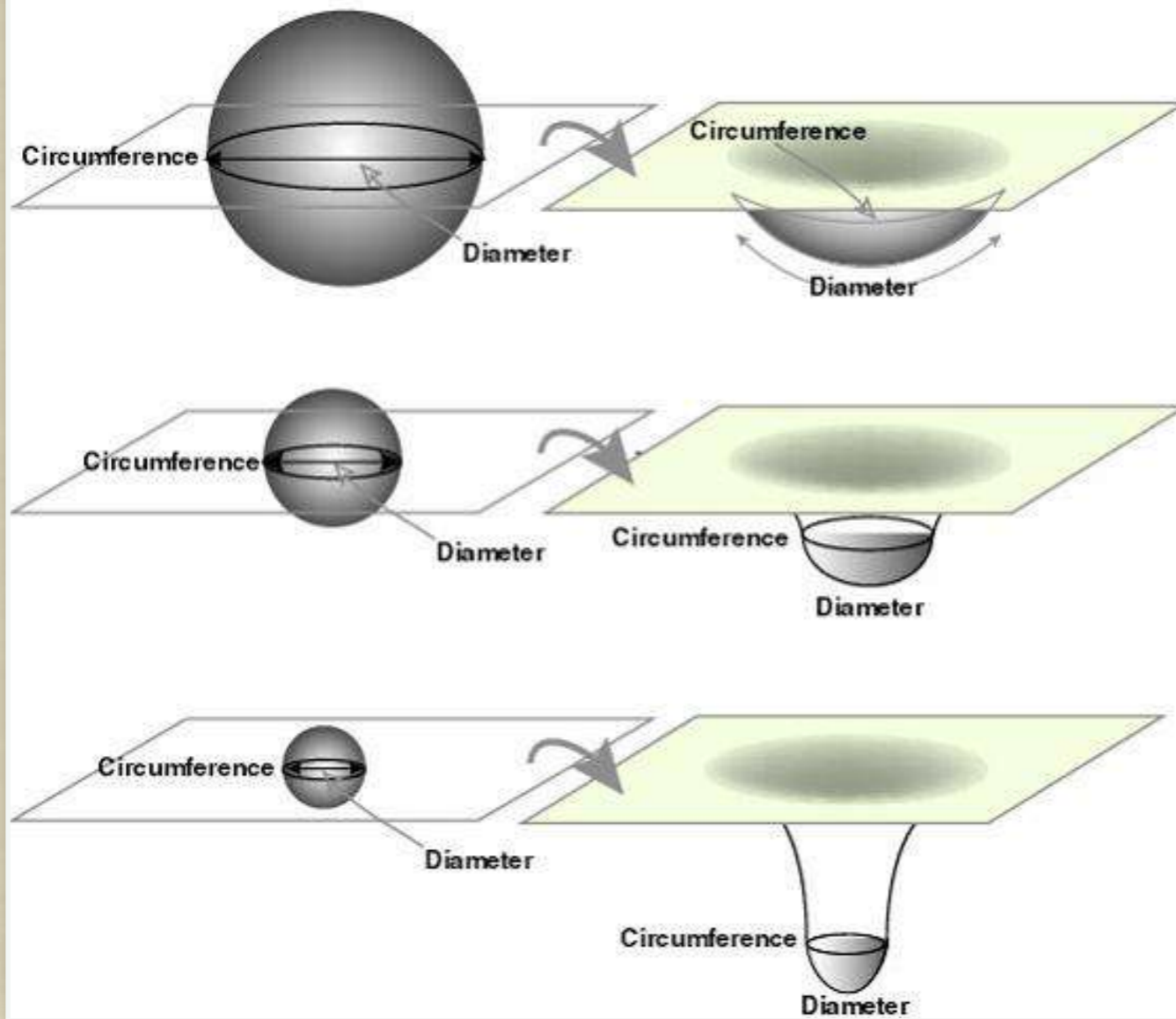
En la ecuación anterior, $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ donde A_{μ} es el cuadri-potencial.

La estructura causal del espacio-tiempo está determinada por la densidad de energía y momento.

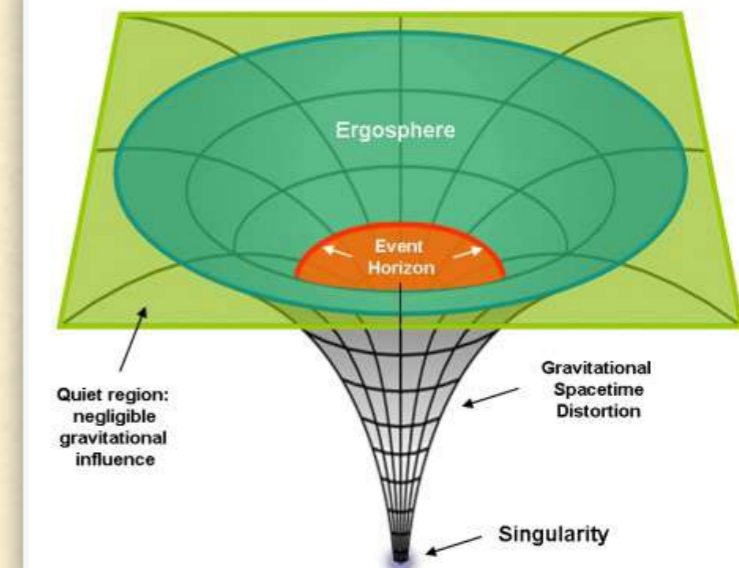


Objetos compactos

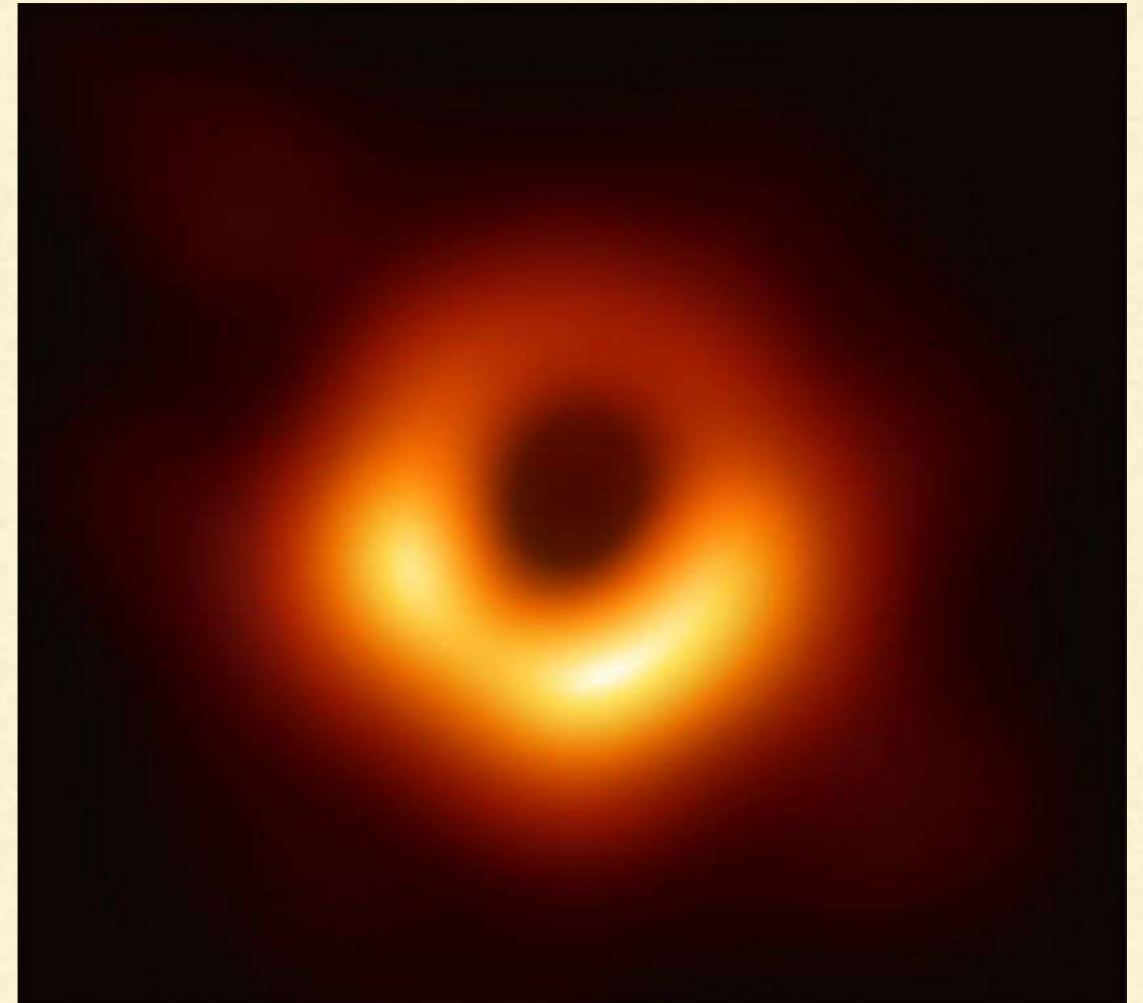
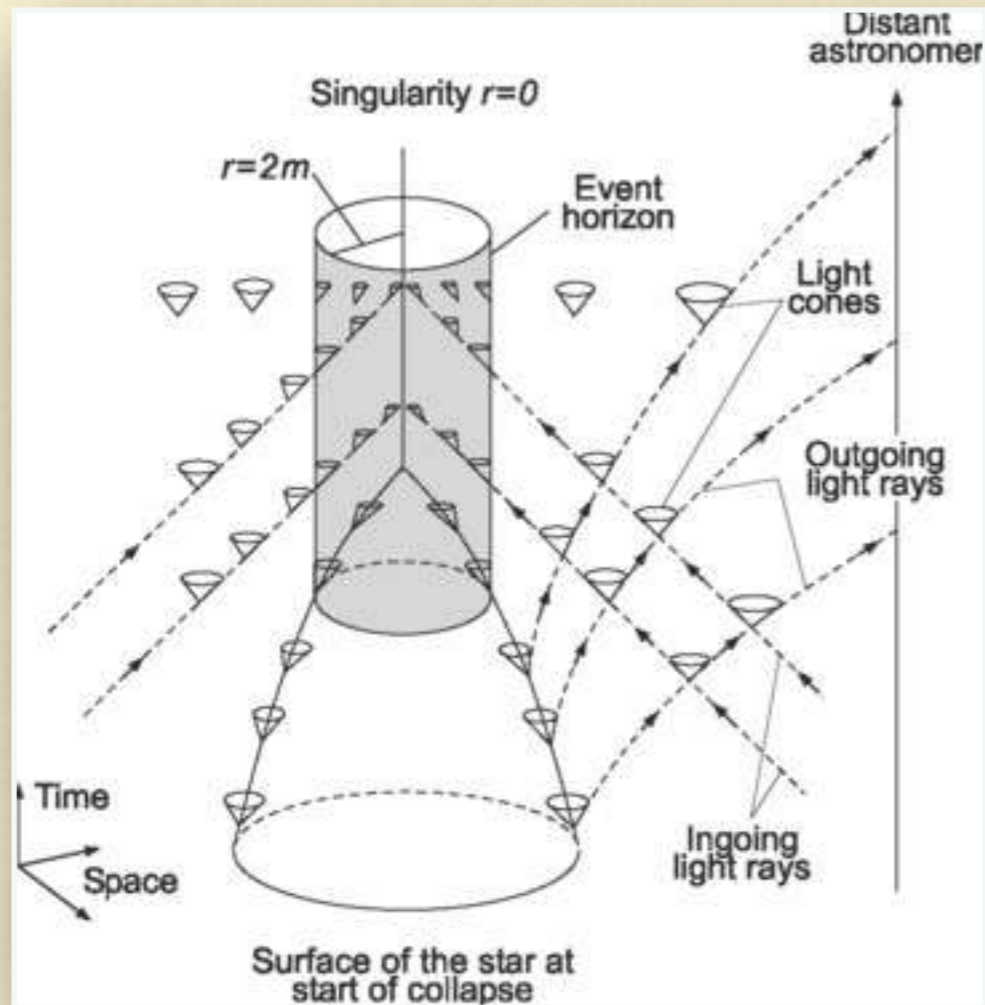
STARS WITH THE SAME MASS, BUT DIFFERENT SIZES: HOW CURVED?



Black Hole Regions



Agujeros negros

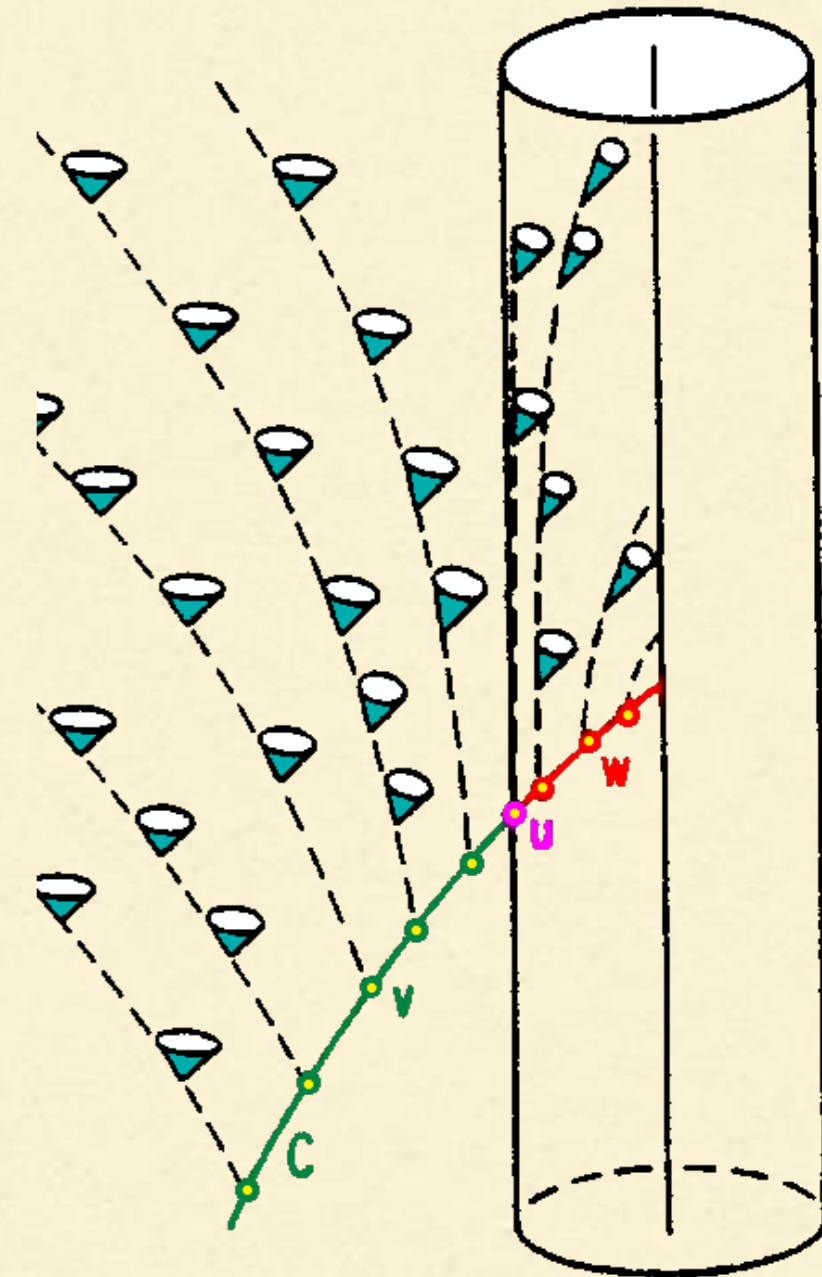
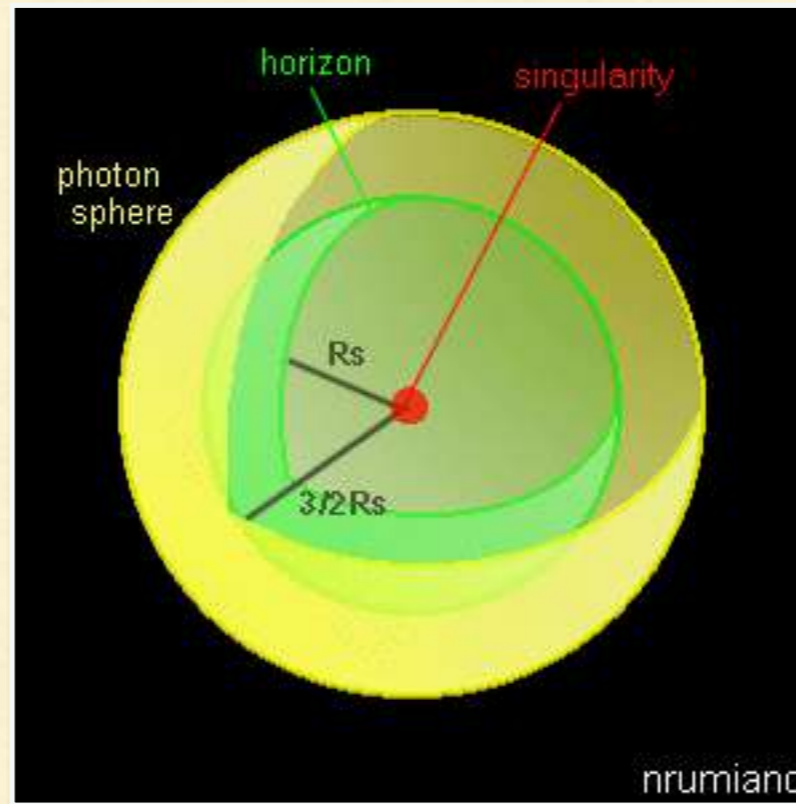
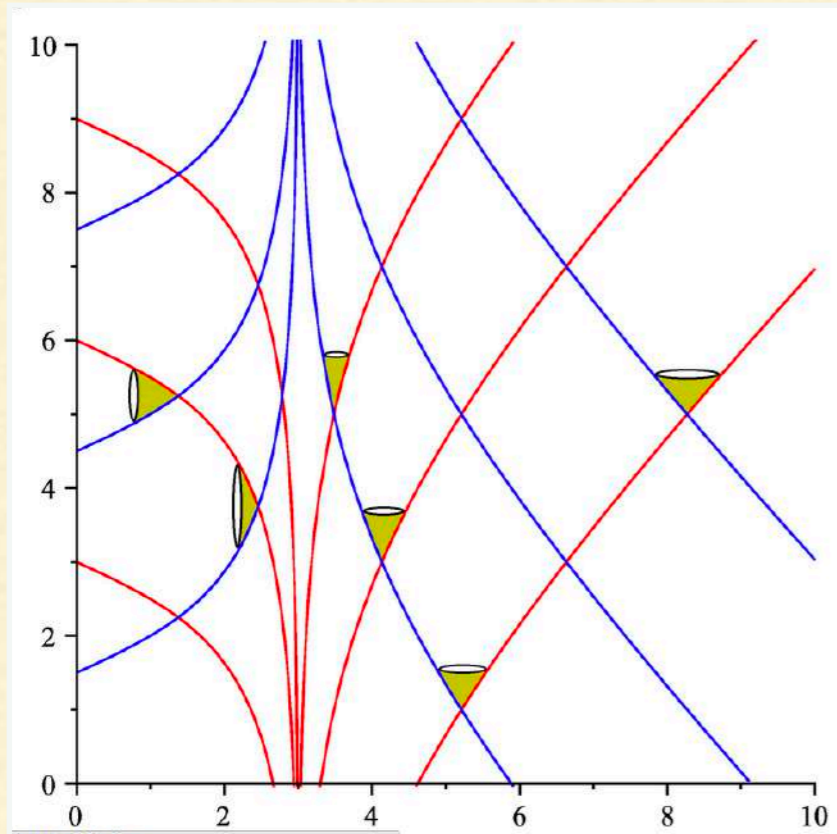


M87

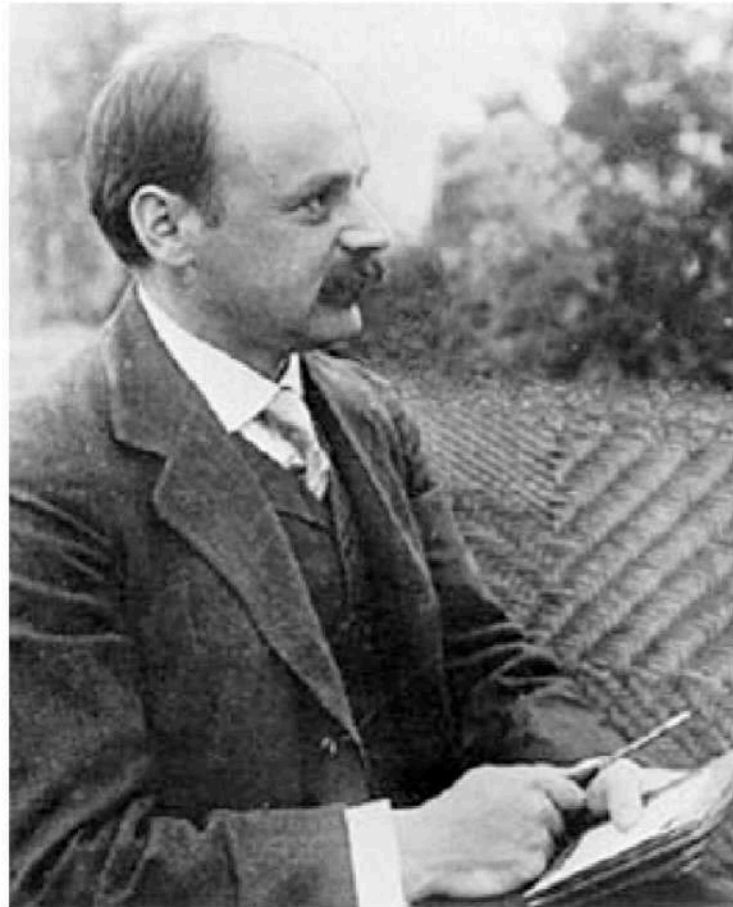
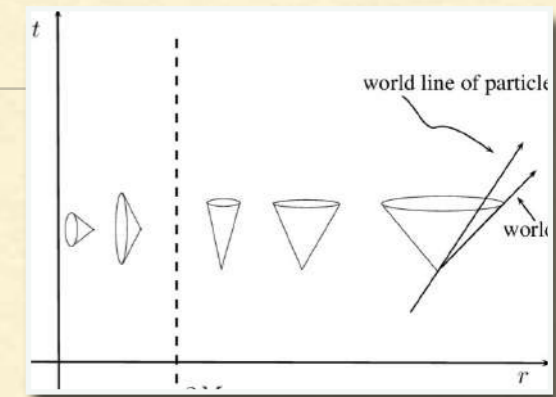
Agujero negro de Schwarzschild

Métrica de Schwarzschild: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M que no rota y con carga neta nula. Viene dada en coordenadas esféricas (de Boyer-Lindquist) por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$



Agujero negro de Schwarzschild



Schwarzschild's Solution to Einstein's Equations

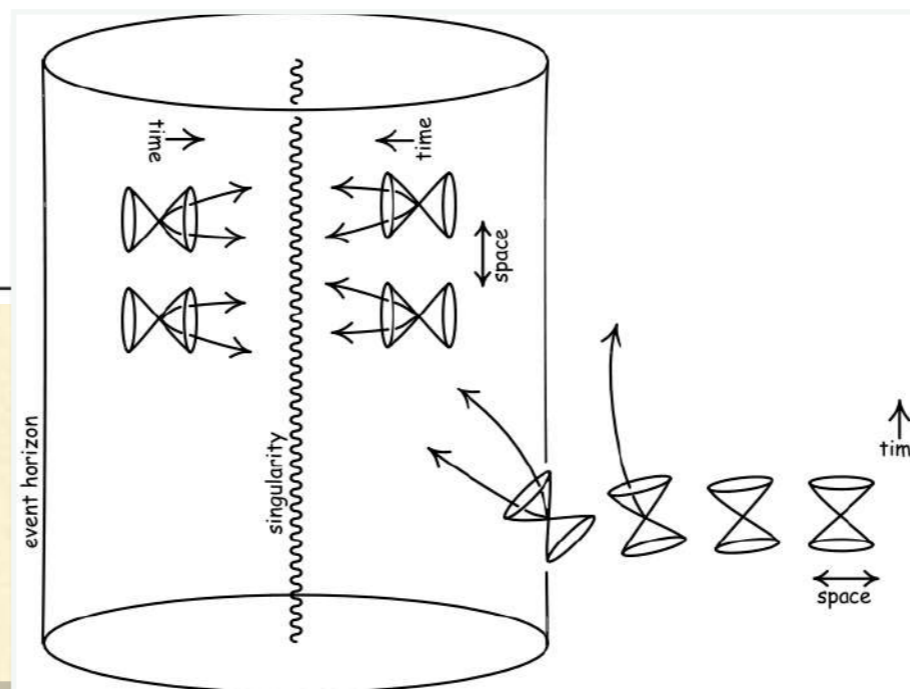
Time Dilation Radial Length Contraction

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Invariant Line Element

Schwarzschild Radius

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$



$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} dr^2$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

Agujero negro de Kerr

Métrica de Kerr: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M en rotación y con carga neta nula.

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi - g_{\phi\phi}d\phi^2 - \Sigma\Delta^{-1}dr^2 - \Sigma d\theta^2$$

$$g_{tt} = (c^2 - 2GMr\Sigma^{-1})$$

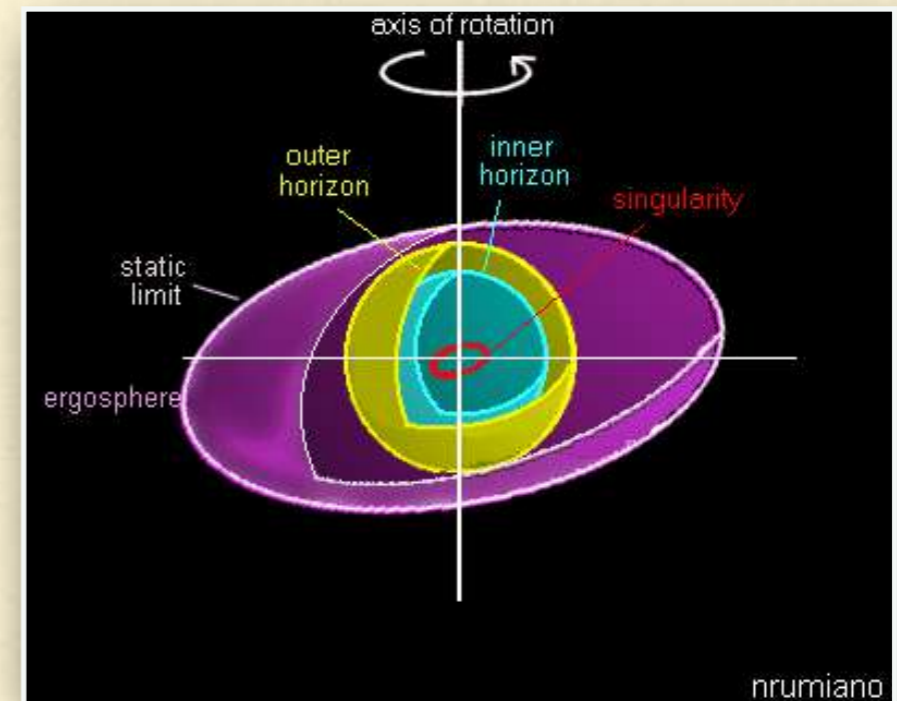
$$g_{t\phi} = 2GMac^{-2}\Sigma^{-1}r\sin^2\theta$$

$$g_{\phi\phi} = [(r^2 + a^2c^{-2})^2 - a^2c^{-2}\Delta\sin^2\theta]\Sigma^{-1}\sin^2\theta$$

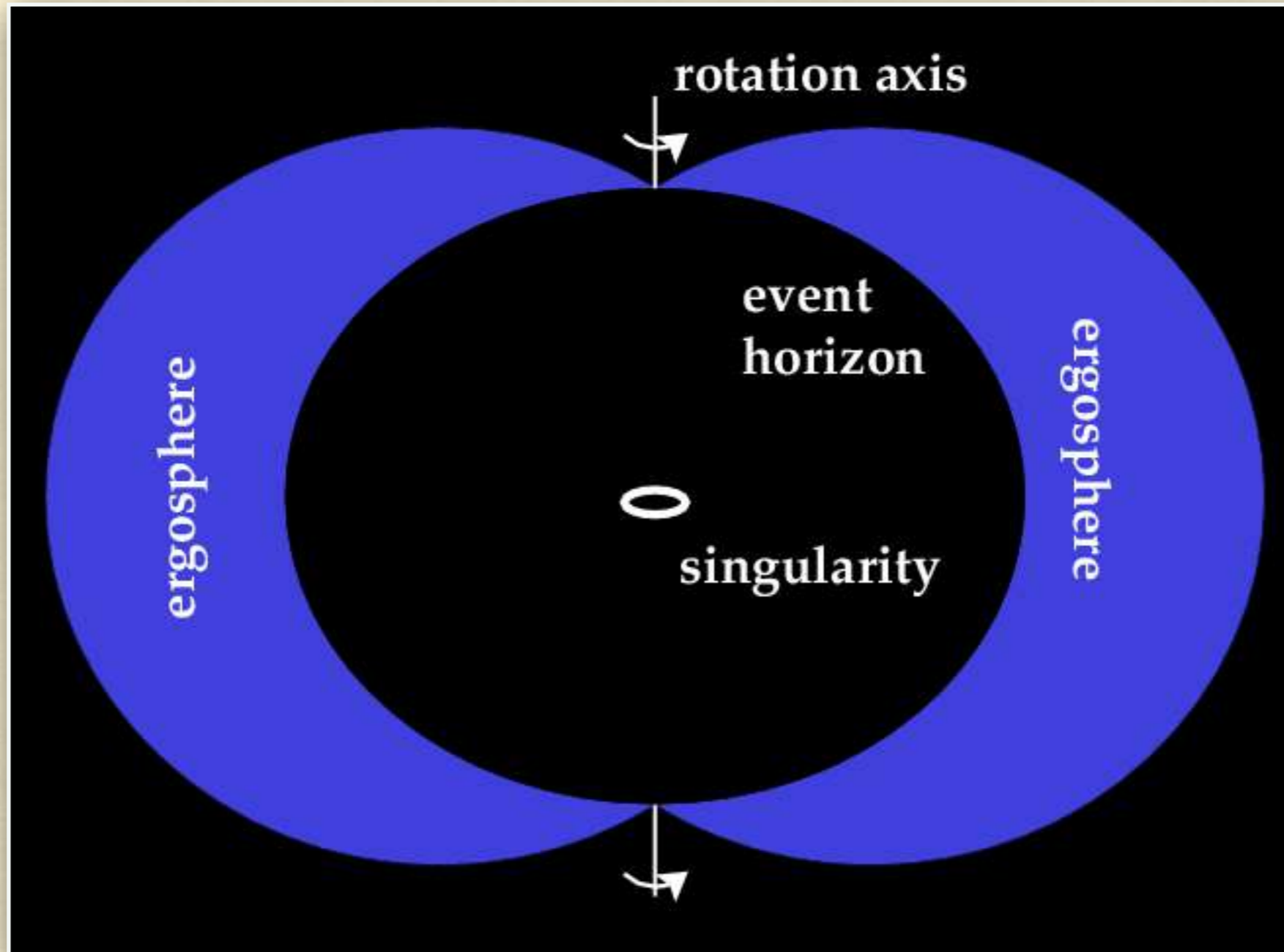
$$\Sigma \equiv r^2 + a^2c^{-2}\cos^2\theta$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2c^{-2}.$$

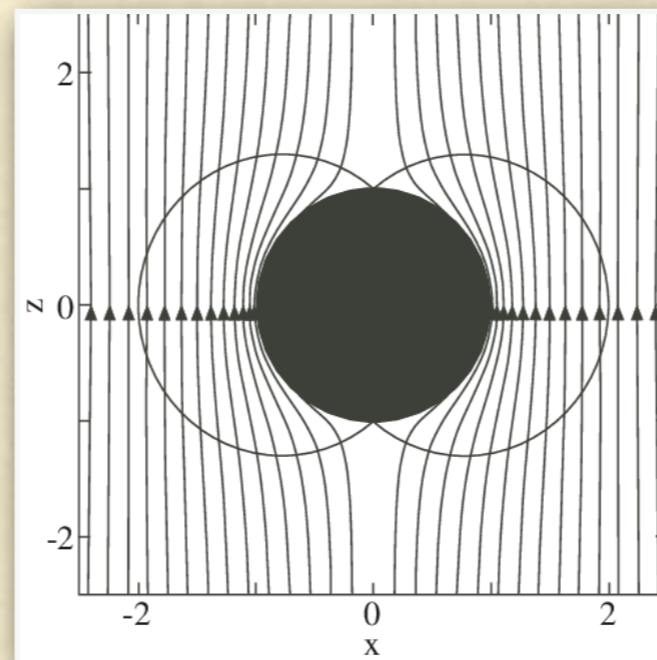
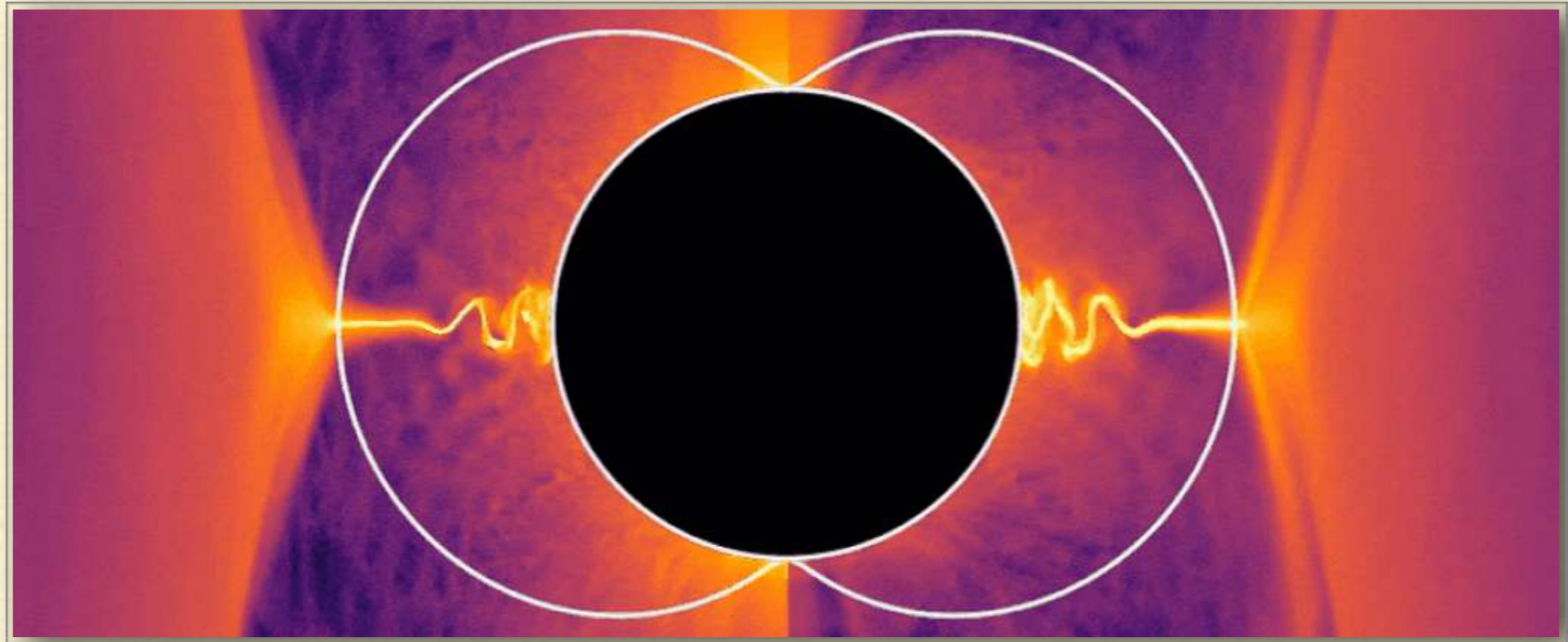
Todos los agujeros negros astrofísicos se piensa son descritos por la métrica de Kerr.



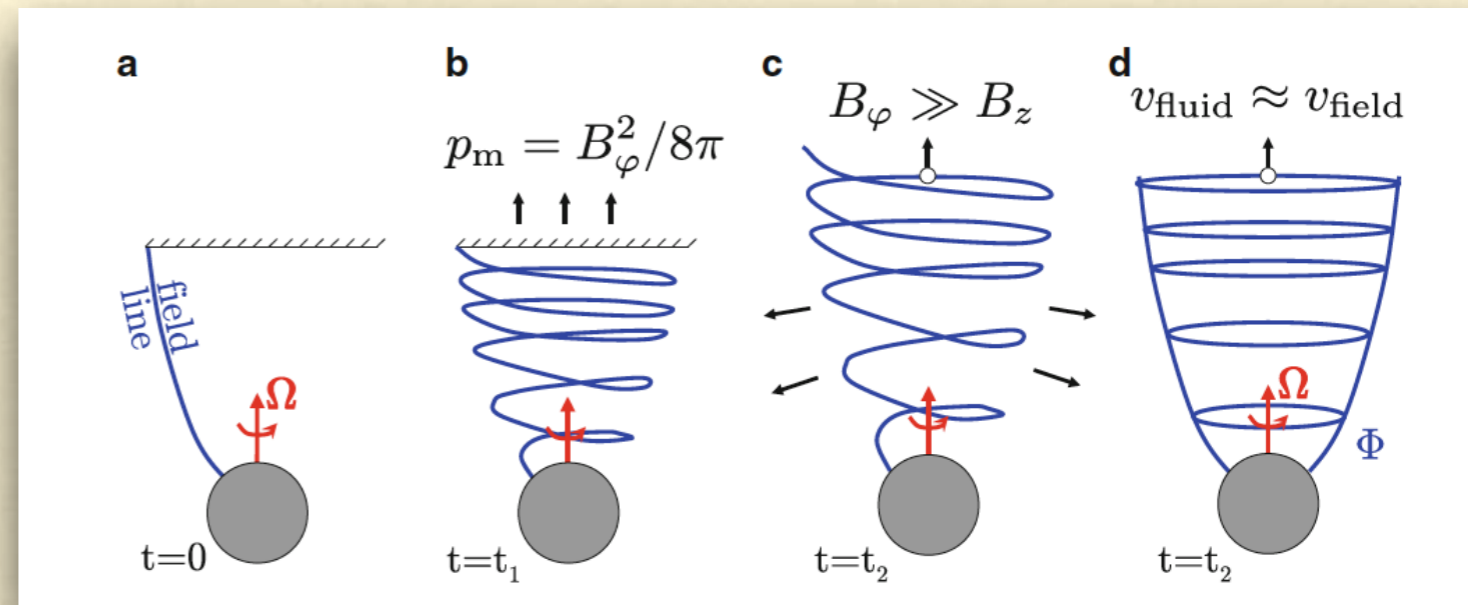
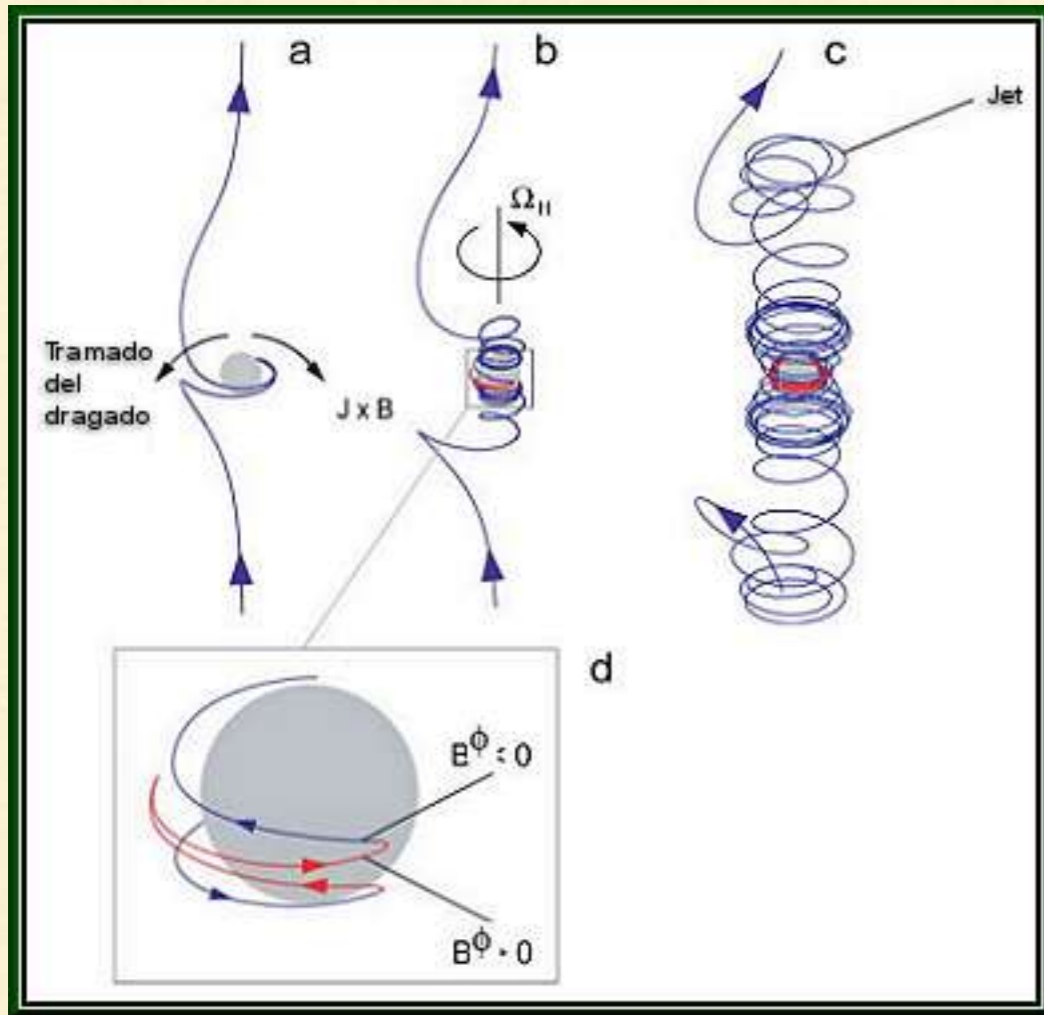
Agujero negro de Kerr



Agujero negro de Kerr

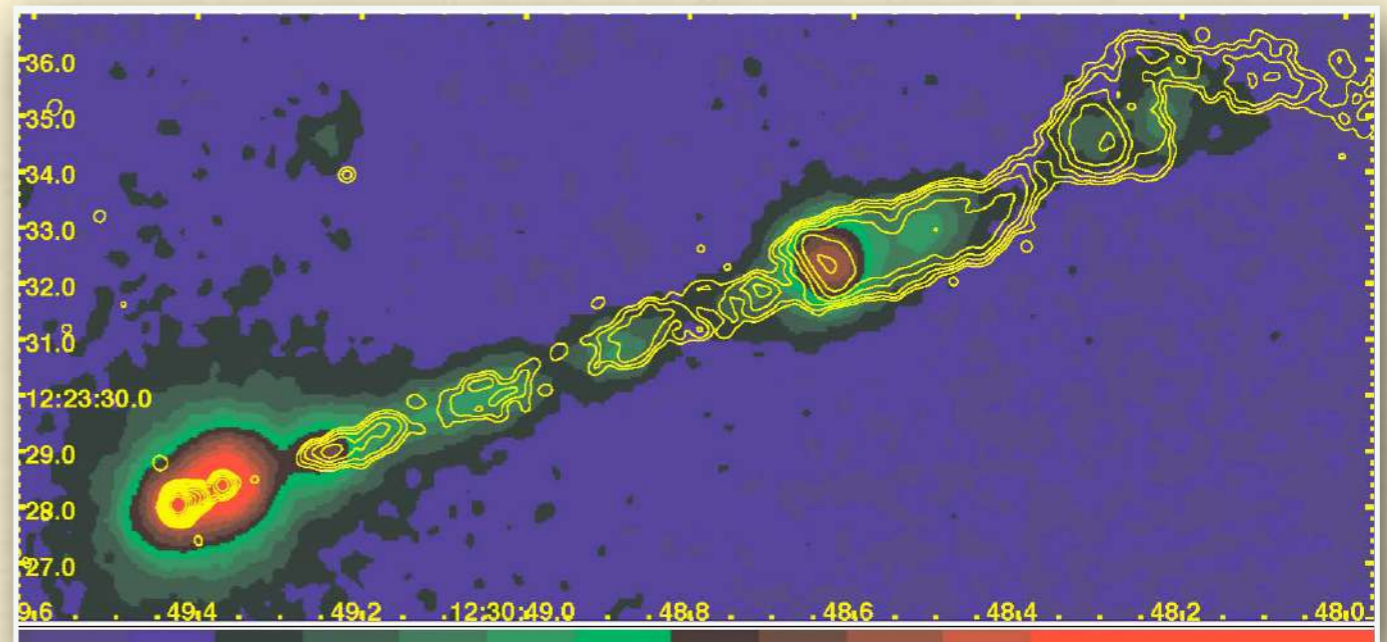


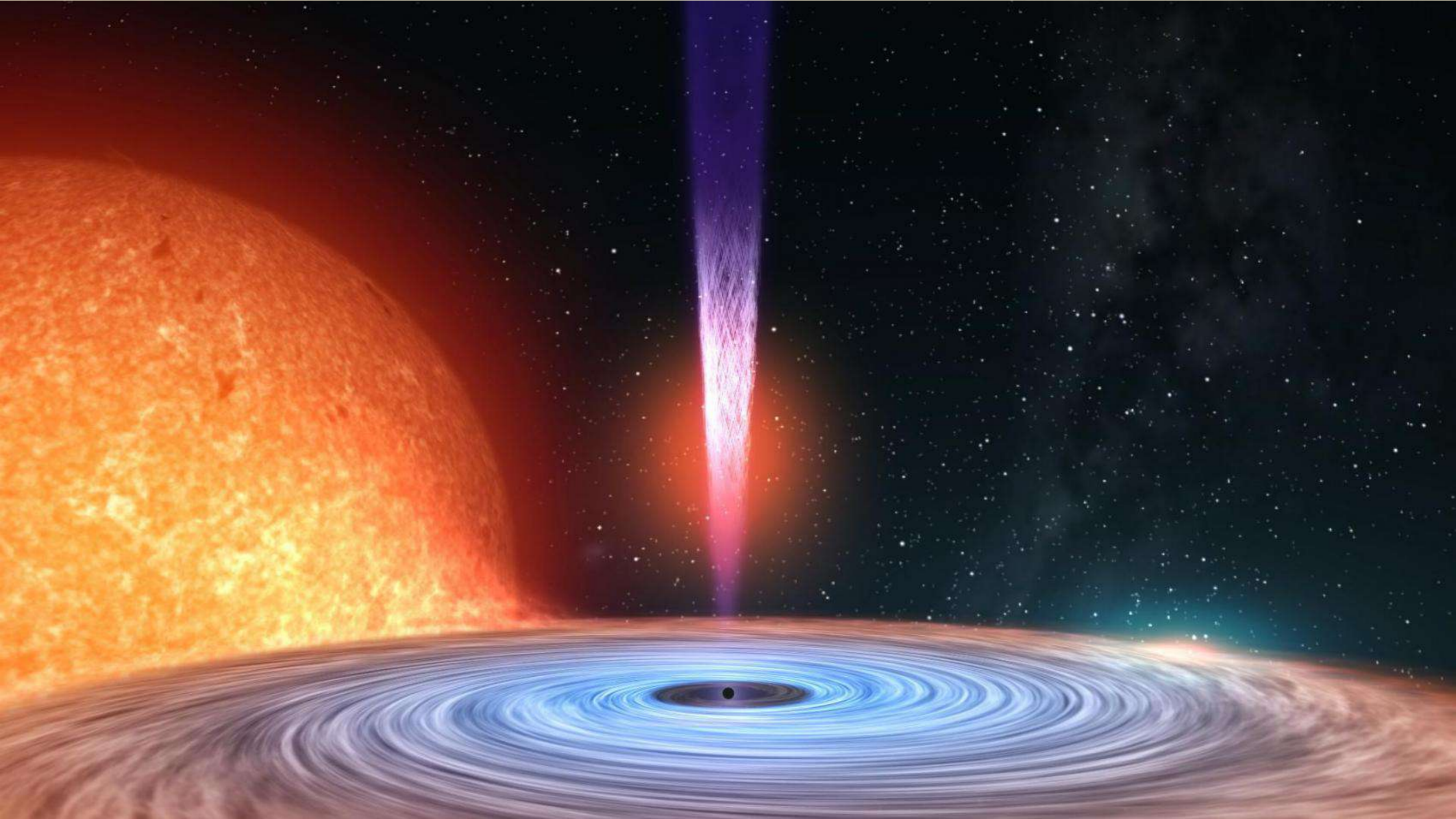
Efectos astrofísicos a través de la ergósfera.

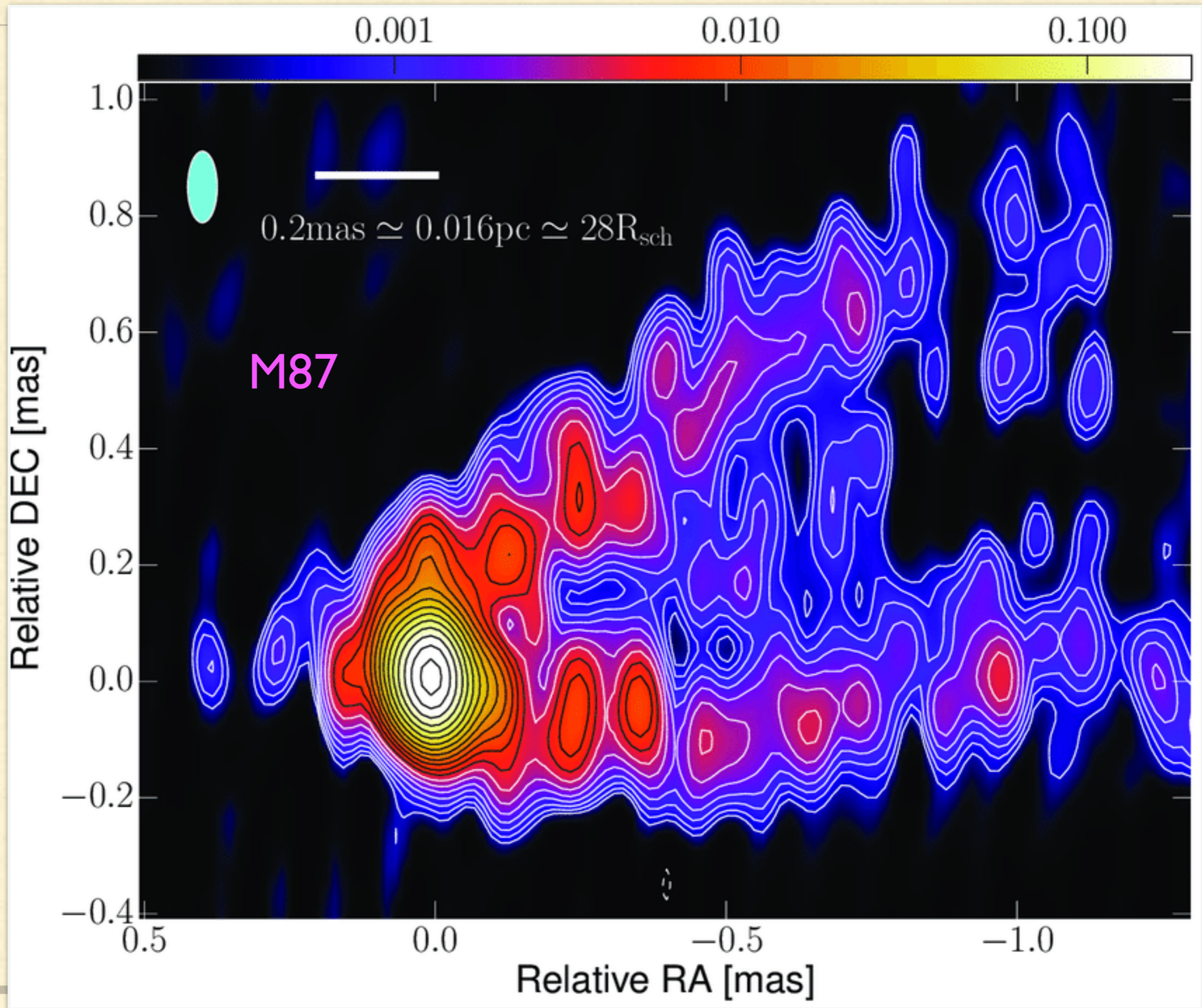


$$L_{\text{EM}} \sim 4\pi \frac{B^2}{8\pi} c R_g^2 \sim c B^2 R_g^2$$

$$L \approx 10^{46} \left(\frac{B_n}{10^4 \text{ G}} \right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot} \right)^2 a_*^2 \text{ ergs}^{-1}.$$







Declination Offset (mas)

Walker et al. 2016

